محدّدوں کا ہندسہ

سلسلۂ نصاب تعلیم جامعۂ عثمانیہ

نشان (۲۸۳)

محدّدوں کا ہندسہ

Co-ordinate Geometry

برائے انٹرمیڈیٹ

مؤلفہ

مولوی قاضی محمد حسین صاحب

ام۔اے۔ ایل ایل۔بی (کینٹب)

و

ڈاکٹر رضی الدین صاحب صدّیقی

ام۔اے (کینٹب) پی ایچ۔ڈی (لزگ) ڈی ایس سی

بار دوم

سنہ ۱۳۶۵ھ م سنہ ۱۳۵۵ف م ۱۹۴۶ع

مطبوعہ

دار الطبع جامعۂ عثمانیہ سرکارِ عالی حیدرآباد دکن

سنہ ۱۳۴۸ ف ۔ بار اول ۔ تعداد طبع (۵۰۰)
سنہ ۱۳۵۵ ف ۔ بار دوم ۔ تعداد طبع (۱۰۰۰)

دیباچہ

تین سو برس قبل مسیح سے سترہویں صدی عیسوی تک حکیم اقلیدس کا ترتیب دیا ہوا علم ہندسہ، ریاضی اور سائنس کی دوسری شاخوں کی بہ نسبت سب سے زیادہ مکمل ہو چکا تھا یہاں تک کہ لوگ عام طور پر یہ خیال کرنے لگے تھے کہ اب اس علم میں کسی اہم اضافہ کی گنجائش ہی باقی نہیں رہی۔ فرانس کے مشہور فلسفی اور ریاضی داں ڈے کارٹ (Descartes) نے سترہویں صدی کی ابتدا میں یہ محسوس کیا کہ ہندسہ کا علم اضافہ اور ترقی کے رُک جانے کی وجہ سے ایک مُردہ علم بن گیا ہے، اور اس میں نئے سرے سے جان ڈالنے کے لیے ضروری ہے کہ جبر و مقابلہ کے علم سے اس کا رشتہ جوڑا جائے۔ اس نئے ہندسہ کو "تحلیلی ہندسہ" یا "امحددوں کا ہندسہ" کہتے ہیں جسے ڈے کارٹ نے ۱۶۳۷ء میں پیش کیا۔ یہیں سے جدید ریاضی کی ابتدا ہوتی ہے۔ سترھویں صدی کے آخری حصہ میں نیوٹن اور لائبنٹز (leibnitz) نے علم احصاء کی بنیاد رکھی۔ اس وقت سے یہ دونوں علم آزاد طور پر اور ایک دوسرے کی مدد سے آگے بڑھتے رہے اور آج بھی ان میں ترقی کی وسیع گنجائش ہے۔

نہ صرف ریاضی کی دوسری شاخوں بلکہ طبیعیات، کیمیا، حیاتیات، طب اور عمرانیات یہاں تک کہ روزمرہ کے ہر کاروبار میں بھی ترسیمی طریقہ کا اکثر استعمال ہوتا ہے اور اس لیے ضروری ہے کہ ریاضی کے طلبا اس موضوع کے بنیادی اصول

جامعہ کی ابتدائی جماعتوں میں سیکھ لیں ۔ یہ کتاب مبتدیوں کے لیے لکھی گئی ہے اور جامعہ عثمانیہ کے انٹرمیڈیئیٹ کے نصاب پر حاوی ہے ۔ اس کے باوجود کوشش کی گئی ہے کہ کتاب اپنے حدود کے اندر مکمل ہو ۔ جن عنوانوں پر بحث کی گئی ہے ان کے متعلق تمام ضروری اُمور بتا دیے گیے ہیں تا کہ پھر اعلیٰ جماعتوں میں ان پر دوبارہ بحث کی ضرورت باقی نہ رہے

اس کتاب میں صرف قایم محور استعمال کیے گئے ہیں اگرچہ مائل محوروں اور قطبی محدّدوں کا ذکر بھی کر دیا گیا ہے ۔ نقطہ کے محدّد اور خطِ مستقیم کی مساوات سارے تحلیلی ہندسہ میں اساسی اہمیت رکھتے ہیں اس لیے پہلے دو باب میں ان پر تفصیلی بحث کی گئی ہے ۔ پڑھنے والوں کی یہ کوشش ہونی چاہیے کہ اس حصہ پر پوری طرح عبور حاصل کیے بغیر آگے نہ بڑھیں ۔ دائرہ، مکافی، ناقص اور زائد کی معیاری مساواتیں پوری وضاحت کے ساتھ حاصل کی گئی ہیں اور مساواتوں کی مدد سے ان منحنیوں کی چند آسان اور مشہور خاصیتوں کو اخذ کیا گیا ہے ۔ کئی توضیحی مثالیں دی گئی ہیں جن میں سوالوں کو تفصیل کے ساتھ حل کیا گیا ہے تا کہ طالب علم کو سوال حل کرنے کا طریقہ سمجھ میں آجائے ۔ متعدد مشقیں بھی فراہم کی گئی ہیں تا کہ طلبا خود اپنے طور پر سوال حل کریں اور مضمون پر مہارت حاصل کر لیں ۔

ہم ان تمام حضرات کے مشکور ہیں جنھوں نے اس کتاب کی ترتیب اور طباعت میں ہماری مدد کی ۔ ہم سررشتہ تالیف و ترجمہ کے عہدہ داروں اور اہلکاروں کے بھی شکر گزار ہیں جن کی محنت اور کوشش کی وجہ سے کتاب کی طباعت میں بہت سہولت ہوئی ۔

قاضی محمد حسین

رضی الدین صدیقی

سنہ ۱۳۴۸ ف

فہرستِ مضامین

محدّدوں کا ہندسہ

بسم اللہ الرحمن الرحیم

محدّدوں کا ہندسہ

پہلا باب

محدّد اور خطِ مستقیم

۱ء۱۔ محدّد۔ ذیل کی شکل میں ایک خطِ مستقیم ہے جو دونوں طرف لامحدود ہے۔ اس خط پر بے شمار نقطے ہیں، ان کا مقام معین کرنا مقصود ہے۔ اس غرض سے اس خط پر ایک نقطہ و لیا گیا ہے جس کے

ب، ا، م، و م ا ب
- ← → +

لحاظ سے باقی تمام نقطوں کے مقام معیّن کیے جائینگے۔ و کے دائیں طرف کوئی نقطے ا، ب، ج ..... ہیں اور بائیں جانب ا، ب، ج، ....، دائیں جانب کے نقطوں پر پہنچنے کے لیے و سے دائیں جانب جانا پڑتا ہے اور بائیں جانب کے نقطوں پر پہنچنے کے لیے بائیں جانب جانا پڑتا ہے، اس "جانے کی جانب" یا فاصلہ کی سمت کو مثبت اور منفی علامات کے ذریعہ بیان کیا جاتا ہے، یہاں یہ قرارداد اختیار کی جاتی ہے کہ دائیں طرف کے طے کردہ فاصلوں کو → مثبت مانا جائیگا اور بائیں جانب کے طے کردہ فاصلوں کو ← منفی۔ یہ محض اختیاری ہے۔

بائیں جانب کے طے کردہ فاصلوں کو مثبت اور دائیں طرف کے فاصلوں کو منفی قرار دیا جا سکتا ہے۔ اب اگر اُ و سے ۱۵۰ میل کے فاصلہ پر واقع ہو اور تمام خط پر کے فاصلوں کا پیمانہ یہ لیا جائے اُ = ۱۰۰ میل، تو و سے دائیں جانب ا کا فاصلہ خط پر ۱۶۵ اُ رکھنا چاہیے۔ پس وا = ۱۶۵ اُ یا اگر اکائی یعنی اینچ ہمارے ذہن میں رہے تو وا = + ۱۶۵ ، مثبت علامت کیونکہ فاصلہ و کے دائیں جانب ناپا گیا ہے دیکھو شکل۔ عدد (+ ۱۶۵) سے نقطہ ا کی حدبندی یا تعیین ہوتی ہے، اس عدد (+ ۱۶۵) کو نقطہ ا کا محدّد کہتے ہیں۔ واضح ہو کہ و سے دائیں جانب فاصلہ ۱۶۵ جانے سے ہم خط کے صرف نقطہ اُ پر پہنچتے ہیں گویا عدد (+ ۱۶۵) کے جواب میں نقطہ ا ہے اور نقطہ ا کے جواب میں صرف عدد (+ ۱۶۵) حاصل ہوتا ہے۔ پس اس ترکیب تعیین یا حوالہ کے فرم کے مطابق ہندسی نقطہ ا اور حقیقی عدد (+ ۱۶۵) میں یگانہ تعلق ہے۔ اسی طور پر نقطہ اُ کا محدّد (- ۱۶۵) ہے منفی علامت اس لیے لی گئی ہے کہ نقطہ اُ شکل میں و کے بائیں جانب واقع ہے۔ پیمائش سے واضح ہوگا کہ اور نقطوں کے محدّد کیا ہیں، مثلاً نقطہ م (+۱) ہے، ب (+۲)، مَ (-۱)، بَ (- $\frac{1}{2}$ ۲) .... وغیرہ۔

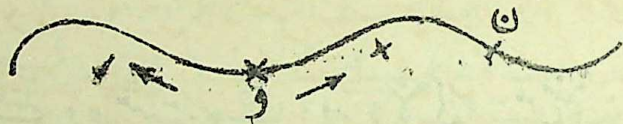
ظاہر ہے کہ و کے دائیں جانب کے تمام نقطے . تا ∞ تک کے تمام حقیقی اعداد سے اور و کے بائیں جانب کے تمام نقطے . تا - ∞ تک کے تمام حقیقی اعداد سے تعبیر ہوتے ہیں جن میں صحیح عدد، کسریں اور بتباین اعداد سب شامل ہیں۔

اب اگر کوئی ہندسی نقطہ ط خط پر کہیں واقع ہو تو ط کا محدّد جبریہ عدد (ا) سے تعبیر ہو سکتا ہے، پس ط (+ا)، ق (- ب) یا بالعموم نقطہ ن (لا)۔ نقطہ ن کا محدّد لا ہے اور لا کی مختلف عددی قیمتوں کے لیے جو مثبت منفی ہو سکتی ہیں یہ نقطہ ن خط پر کہیں واقع ہو سکتا ہے۔ اگر کوئی نقطہ خطِ مستقیم پہ حرکت کرے تو اس کے محدّد کو بھی اکثر لا سے تعبیر کرتے ہیں۔ یعنی خطِ مستقیم پر کا کوئی نقطہ، ایک فاصلہ، ایک پیمائش، ایک عدد سے تعبیر ہو سکتا ہے مثلاً (۳)، (- ۲۶۵)، (ا)، (لا)، وغیرہ۔

واضح ہو کہ اس ترکیب کی مدد سے ہندسی نقطہ کا نام ایک عدد سے رکھا گیا ہے۔

اور عدد و کے پہلے مثبت، منفی علامت لگانے سے مبداء و کے دائیں بائیں جانب کے سب نقطے نامزد ہو جاتے ہیں۔

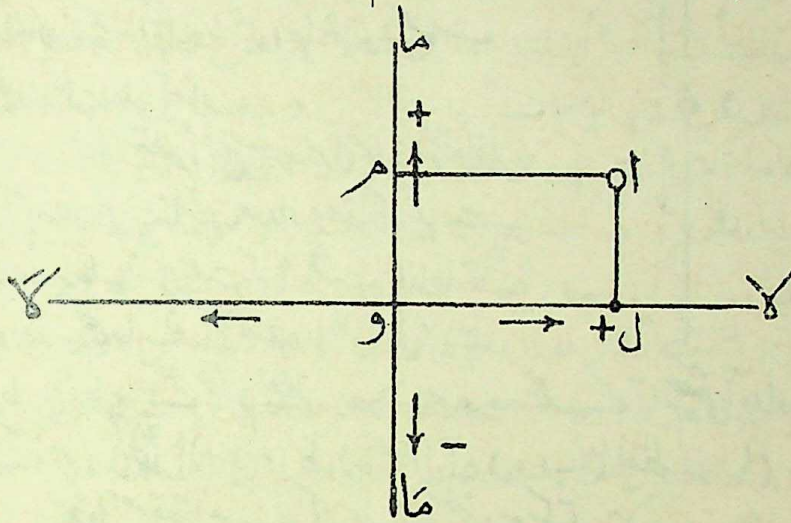
خط مستقیم اُفقی ہونے کی بجائے انتصابی ہو سکتا ہے۔ اس پر مناسب مبداء و مقرر کیا گیا ہے۔ و سے اُوپر جانے کی سمت کو ↑ مثبت مانا جاتا ہے اور نیچے جانے کی سمت ↓ کو منفی، پہلے کی طرح خط پر کے تمام نقطے ـ ∞ سے + ∞ تک کے تمام حقیقی اعداد سے تعبیر ہو سکتے ہیں۔ مثلاً ا (+۱۰۲۰)، ط (+ ا)، ق (- ب)، نقطہ ن (۱۱) ہے۔

خط مستقیم ہونے کی بجائے منحنی ہو سکتا ہے۔

اس پر مناسب مبدأ و لے کر، ایک طرف کی سمت کو مثبت اور دوسرے طرف کی سمت کو منفی لیا جا سکتا ہے۔ اگر اس کی قوس کا طول س سے تعبیر ہو تو نقطہ ’ن‘ (س) سے تعبیر ہوگا جہاں س، مثبت، منفی ہونے سے ان تمام اعداد پر منطبق ہو سکتا ہے۔

پس خط پر کے کسی نقطہ کا محدد ”لا“ ہے۔ یا اگر متحرک نقطہ خط پر حرکت کرنے کے لیے مجبور ہو تو بھی اس کا محدد ”لا“ ہوگا جہاں لا بدلیگا یا مختلف عددی قیمتیں اختیار کریگا جیسے نقطہ خط پر حرکت کریگا۔

۱۱ء ۱ — اب تک نقطہ ایک خط پر رہنے یا حرکت کرنے کے لیے مقید تھا، اب فرض کرو کہ نقطہ ایک مستوی سطح پر واقع ہے یا مستوی سطح میں رہنے یا حرکت کرنے کے لیے مجبور ہے اور اس کا مقام متعین کرنا مقصود ہے۔

اس مستوی میں دو خط علی القوائم لا و لا اور ما و ما لو ایک اُفقی اور دوسرا انتصابی۔ یہ نقطہ و پر قطع کرتے ہیں، و کو پیمائشوں کا مبدأ مانو نیز

یہ قرارداد ہم اختیار کرتے ہیں، تمام اُفقی فاصلے جو و لا کی سمت میں

ناپے جائینگے وہ مثبت ہونگے اور ولا کی سمت میں منفی۔ نیز انتصابی سمت میں جو فاصلے و ما کی سمت میں ناپے جائینگے وہ مثبت ہونگے اور و مَا کی سمت میں منفی۔ ثابت خط لاولا کو محور لا کہتے ہیں اور مَا و ما کو محور ما۔ (پس ایک مستوی میں نقطوں کی تعیین کے لیے ذیل کی ترکیب یا آلہ ہم نے اختیار کیا ہے "دو خط اور ان کا نقطۂ تقاطع مبدا" مع فاصلوں کے متعلق قراردادوں کے)۔

اب مستوی سطح میں کسی نقطہ ا کا مقام معیّن کرنا مقصود ہے۔ ا سے ان ثابت خطوں پر عمود ال، ام کھینچو۔ ان دو عمودوں یا ان کی پیمائشوں کے ذریعے نقطہ ا کا مقام معیّن ہو سکتا ہے۔ یعنی م ا، اور ل ا نقطہ ا کا مقام متعین کرتے ہیں اور ا کے محدد قرار دیے جا سکتے ہیں یا ہم ایسے یوں بھی دیکھ سکتے ہیں کہ مستوی سطح میں کے نقطہ ا تک پہنچنے کے لیے مبدا سے فاصلہ و ل خط و لا پر اور پھر ل ا محور ما کے متوازی جانا پڑتا ہے۔

چونکہ م ا = و ل اس لیے دونوں صورتوں میں نقطہ ا کی تعیین و ل اور ل ا سے ہوتی ہے یعنی نقطہ ا کے محدد (و ل، ل ا) ہیں۔ اوپر کی شکل کو دیکھنے سے

ظاہر ہے کہ ول اور ل ا دونوں مثبت ہیں۔ اگر دونوں محوروں کے متوازی فاصلوں کی اکائی ایک ہی لی جائے مثلاً ا = ۱۰ تو ول = ۱۱ اور ل ا = ۶، یعنی نقطہ ا کے محدّد ہیں (۱۱، ۶)۔ مختلف محوروں پر مختلف اکائیاں استعمال ہو سکتی ہیں۔

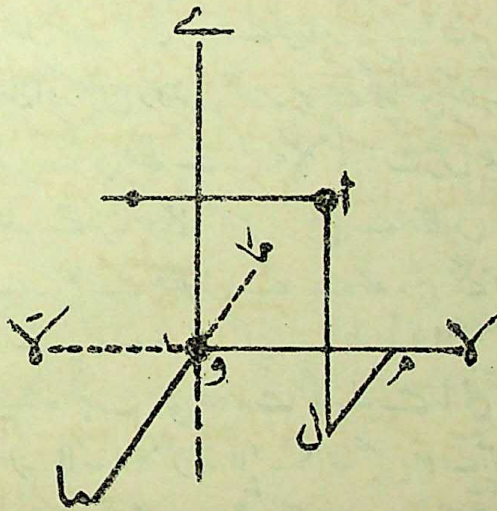
یاد رہے کہ اس تعیین میں محور لا پر یا محور لا کے متوازی فاصلہ کو پہلے لکھا گیا ہے، اسے فصلہ کہتے ہیں اور محور ما کے متوازی فاصلہ کو بعد میں لکھا گیا ہے اسے نقطہ کا "معیّن" کہتے ہیں۔ مثلاً ول فصلہ ہے اور ل ا معیّن۔ پس ہر نقطہ اس طرح تعبیر ہوگا (فصلہ، معیّن)؛ (ول، ل ا)، (۱۱، ۶)۔ گویا سطح مستوی میں کا کوئی نقطہ دو پیمائشوں یا دو عددوں سے تعبیر ہوگا۔

محاور لا اور ما مستوی مذکور یا دو ابعاد کی فضاء کو چار حصّوں میں تقسیم کرتے ہیں، لا وما، ما و لاَ، لاَ و ماَ، ماَ و لا۔ یہ حصے بالترتیب رُبع اول، دوم، سوم، چہارم کے نام سے موسوم ہوتے ہیں۔ پہلے ربع لا وما میں کے کسی ایک نقطہ تک پہنچنے کے لیے ولا پر کچھ فاصلہ مثبت سمت میں اور وما کے متوازی کچھ فاصلہ مثبت سمت میں طے کرنا پڑتا ہے، ظاہر ہے کہ اس رُبع کے تمام نقطوں کے لیے فصلہ اور معیّن دونوں مثبت ہونگے گویا کسی نقطہ کے محدّد ہونگے (+، +)، دوسرے ربع میں کے کسی نقطہ کے لیے ولاَ کی سمت میں کچھ فاصلہ اور وما کی سمت میں کچھ فاصلہ طے کرنا ہوگا۔ اس رُبع کے نقطوں کے لیے محدّد ہونگے (−، +) تیسرے رُبع کے نقطوں کے لیے محدد ہونگے (−، −) اور چوتھے رُبع کے نقطوں کے لیے (+، −)۔ اُوپر کا نقطہ ا (۱۱، ۶) ہے، ان دو اعداد ۱۱، ۶ کے پہلے مثبت منفی علامات لگانے سے باقی تین رُبعات میں تین نقاط (−۱۱، ۶)، (−۱۱، −۶)، (+۱۱، −۶) حاصل ہوتے ہیں۔ اور پہلے رُبع کے تمام نقطوں کے مماثل جن کے محدد دو مثبت عددوں سے تعبیر ہوتے ہیں اس طور پر مثبت منفی علامات استعمال کرنے سے باقی تین رُبعات کے تمام نقطے حاصل ہو سکتے ہیں، گویا دو ابعاد کی فضا کے تمام نقطے اس طور پر، دو محدّدوں کے ذریعہ جبریہ علامات استعمال کرنے سے حاصل ہو جاتے ہیں۔ پس مستوی سطح میں کا نقطہ اس طرح کا ہوگا (−۲، ۳٫۲) یا زیادہ عام طور پر (ا، ب) یا (لا، ما)۔

جب نقطہ کے محدّدوں کی جبریہ شکل ہو مثلاً (لا، ما)، تو لا، ما کو مختلف عددی قیمتیں دینے سے مستوی کے تمام نقطے اس سے تعبیر ہو سکتے ہیں۔

نیز جب نقطہ متحرک ہو مثلاً ایک دائرہ کے محیط پر حرکت کرے تو اس کے محدّد لا، ما سے تعبیر ہو سکتے ہیں جہاں لا، ما متغیر ہونگے۔ پس دو ابعاد کی فضا میں کوئی نقطہ ن (لا، ما) ہے۔

ہم آگے دیکھینگے کہ ہر منحنی جو بالتمام دو ابعاد کی فضا میں واقع ہو سکتا ہے جیسے خطِ مستقیم، دائرہ، قطع مکافی، وغیرہ اس پر کے نقطے ایک رشتہ پورا کرتے ہیں جو (لا، ما) کی رقوم میں بیان ہو سکیگا۔

۱۲ء۱ ۔ محدّد تین ابعاد میں — اب فرض کرو نقطہ ایک سطح مستوی میں رہنے کے لیے مقید نہیں ہے بلکہ تین ابعاد کی فضا میں کہیں واقع ہو سکتا ہے۔ اس کے مقام کی تعیین مقصود ہے۔ اس صورت میں حوالہ کا فریم یہ اختیار کیا جاتا ہے۔

کوئی تین متناسب علی القوائم مستویان ماوے، ےولا، لاوما فضا میں لو، یہ فضا کو آٹھ حصّوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ ہر حصّہ کو ثمن کہا جائیگا۔ یہ حوالہ کے مستوی قرار دیے جائینگے۔

یہ مستوی نقطہ و پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔ و پیمائش کا مبداء ہے۔ ان میں سے دو دو مستوی تین خطوطِ مستقیم ولا، وما، وے پر ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں۔ یہ خط محور قرار دیئے جائینگے۔ محور لا کی سمت لا و لا مثبت اور لا و لا منفی ہوگی اسی طرح ما و ما مثبت اور ما و ما منفی اور ے و ے مثبت اور ے و ے منفی ہوگی۔

اب نقطہ ا پر پہنچنے کے لیے مبداء و سے فاصلہ و م (۳) محور لا پر اور م ل (۵، ۱) محور ما کے متوازی اور ل ا (۲) محور ے کے متوازی جانا پڑتا ہے پس ا کے محدّد (۲، ۵، ۱، ۳) ہیں۔ اسی طرح ا کے مماثل باقی سات ثمنوں میں نقطے ہونگے (-۲، ۵، ۱، ۳)، (-۲، -۵، ۱، ۳)، (۲، -۵، ۱، ۳)، (۲، ۵، ۱، -۳)، (-۲، ۵، ۱، -۳)، (-۲، -۵، ۱، -۳)، (۲، -۵، ۱، -۳)

گویا تین مثبت عددوں کے سامنے مثبت منفی علامتیں لگانے سے ایسے (۲^۳) آٹھ اعداد حاصل ہوتے ہیں جو فضاء کے مختلف ثمنوں میں واقع ہیں۔ زیادہ عام صورت میں نقطہ ن کے محدّد (ا، ب، ج) ہونگے یا (لا، ما، ی)۔ نقطہ ن (لا، ما، ی) محدّدوں لا، ما، ی کی مختلف عددی قیمتوں کے لیے فضاء میں کے تمام نقطوں پر منطبق ہو سکتا ہے۔ پس فضا میں کے کسی نقطہ کی تعیین کے لیے تین پیمائشوں یا تین محدّدوں مثلاً (۲، -۳، ۵)، (ا، ب، ج)، یا (لا، ما، ی) کی ضرورت ہوگی۔

مشق ۱

(۱) حقیقی اعداد - ∞ تا + ∞ کو ایک خطِ مستقیم پر ترتیب دو کسور اور متبائن اعداد کی تعیین بھی کرو۔

(۲) خط ا ب کا وسطی نقطہ و ہے اور خط پر کوئی اور نقطہ ج ہے و کو محدّدوں کا مبداء مان کر ثابت کرو کہ

ا ج + ج ب = ۲ و ب

ا ج - ج ب = ۲ و ج

(۳) ایک خطِ مستقیم پر دو نقطے ا، ب ہیں، ان کی اندرونی اور بیرونی تقسیم ایک ہی نسبت میں نقاط ج، د سے ہوتی ہے، محدّد درج کرنے سے ثابت کرو کہ

$$\frac{۲}{\text{اب}} = \frac{۱}{\text{اج}} + \frac{۱}{\text{اد}}$$

(۴)

ا　ج　ب　د

ایک خطِ مستقیم پر چار نقطے ا، ب، ج، د کسی ترتیب میں ہیں، ہر نقطہ کے لیے محدّد فرض کرنے سے ثابت کرو کہ

بج × اد + جا × بد + اب × جد = ۰

(۵) دو ابعاد کی فضا میں مناسب پیمانہ پر

(ا) نقاط (۱، ۰)، (-۲ ۱/۲، ۰)، (۳ ۱/۳، ۰) کی شکل میں نشاندہی کرو۔
واضح ہو گا کہ یہ سب نقطے محور لا پر واقع ہیں ان سب کا ما = ۰۔

(ب) نقاط (۰، -۱)، (۰، ۵٫۳)، (۰، -۲ ۱/۳) کی شکل میں نشاندہی کرو۔
واضح ہو گا کہ یہ سب نقطے محور ما پر واقع ہیں، ان سب کا لا = ۰۔

(ج) نقاط (۱، ۱)، (۲٫۵، ۲٫۵)، (۴، ۴)، (-۵٫۵، -۵٫۵)، (-۲، -۲) کی شکل میں نشاندہی کرو۔
واضح ہو گا کہ یہ سب نقطے محاور و لا، و ما کے درمیانی زاویہ کے منصّف پر واقع ہیں، ان سب کے لیے لا = ما

(د) نقاط (۵٫۱، -۵٫۱)، (۳، -۳)، (-۲، ۲)، (-۴، ۴) کی شکل میں نشاندہی کرو۔
واضح ہو گا کہ یہ نقطے و ما اور و لا کے درمیانی زاویہ کے منصّف پر واقع ہیں، ان سب کے لیے لا = -ما

(۶) سکیل ۱/۲" = ۱ کے موافق، مربع دار کاغذ پر

(ا) ان نقطوں (-۷، ۲)، (-۱۴، ۱)، (۰، ۵)، (۷، ۸)، (۱۱، ۱۴) کو مرتسم کرو، اور ان میں سے خطِ مستقیم کھینچو۔

(ب) ان نقطوں (-۵، ۳)، (-۱۱، ۳)، (-۵، ۹)، (۱، ۳) کو مرتسم کرو اور دکھاؤ کہ یہ ایک ایسے دائرہ کے محیط پر واقع ہیں جس کا مرکز (-۵، ۳) ہے اور نصف قطر ۶۔

(ج) ان نقطوں (-۲، -۴)، (۳، ۶)، (۳، -۱۴)، (۱۸، ۱۶)، (۱۸، -۱۲) کو مرتسم کرو اور ایک ایسا مکافی ان میں سے کھینچو جس کا راس (-۲، -۴) ہے اور جس کا وتر خاص ۲۰ ہے۔

(د) نقاط (۰، -۴)، (-۲۰، ۴)، (-۱۰، ۱) کو مرتسم کرو اور ان نقاط میں سے ایک قطع ناقص کھینچو اور دکھاؤ کہ اس کا مرکز تقریباً (-۱۰، ۴) ہے اور اس کے نیم محور ۱۰ اور ۵ ہیں۔

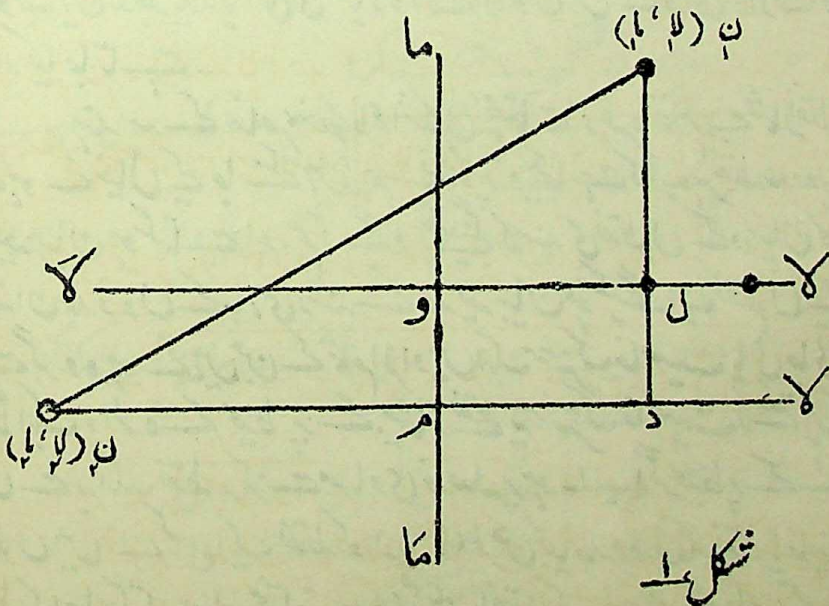
۱۲۔ اوپر ہم نے دیکھا ہے کہ ایک ابعاد میں کسی نقطہ کا محور "لا" ہوگا، دو ابعاد کی فضاء میں نقطہ کے محدد (لا، ما) ہونگے اور تین ابعاد کی فضاء میں (لا، ما، ی)۔ انھیں کارٹیزی محدد کہتے ہیں۔

نقطہ کو اس طور پر عددوں کے ذریعہ تعبیر کرنے کا طریقہ، فرنسیسی فلاسفر ڈی کارٹ (Descartes) نے ایجاد کیا، اسی کے نام کے ساتھ یہ محدد منسوب ہیں۔ جدید ریاضی کی بنیاد ڈالنے والوں میں سے ڈی کارٹ کا نام شمار کیا جاتا ہے۔

ہندسہ کے عناصر، خطوط، اشکال، مجسمات، وغیرہ، تمام بے شمار نقطوں سے بنے ہوئے خیال کیے جا سکتے ہیں، ہم نے اوپر دیکھا ہے کہ اب ہر نقطہ عددوں کے ذریعہ بیان ہو سکتا ہے اور ہم آگے دیکھینگے کہ ہندسی نقطوں کے درمیان کا کوئی رشتہ ان عددوں کے باہمی رشتہ کے ذریعہ بیان ہو سکیگا۔ اب نقطوں کے اکثر ایسے گروہ ہوتے ہیں جن کے تمام افراد میں ایک مشترک خاصیت پائی جاتی ہے مثلاً ایک دائرہ کے محیط پر کے بیشمار نقطے یہ مشترک خاصیت رکھتے ہیں کہ ان میں سے ہر ایک نقطہ مرکز سے مساوی فاصلہ پر ہو۔ اب اگر محیط پر کے بے شمار نقطوں میں سے کسی ایک نقطہ کو (لا، ما) فرض کیا جائے جو عام نقطہ یا نمایندہ نقطہ خیال کیا جا سکتا ہے اور مختلف عددی قیمتیں اختیار کرنے سے یہ محیط پر کے بے شمار

نقطوں میں سے کسی ایک پر منطبق ہو سکتا ہے اور دیے ہوئے مرکز کے محدّد (ا، ب) ہوں اور دائرہ کا دیا ہوا نصف قطر ر ہو تو اس ہندسی امر کو ہمیں ریاضی کی علاماتی زبان میں بیان کر دینا ہے کہ نقاط (لا، ما) اور (ا، ب) کا فاصلہ ر کے مساوی ہے جس سے ایک جبریہ رشتہ لا، ما، ا، ب، ر میں ملیگا۔ اسی طور پر تین ابعاد میں ایک کرّہ کی سطح پر کے نقطے مرکز سے مساوی فاصلوں پر ہوتے ہیں، نمایندہ نقطہ اگر (اگر لا، ما، ی) ہو اور دیا ہوا مرکز (ا، ب، ج) اور نصف قطر ر تو اس ہندسی امر کو بیان کرنے سے ہمیں (لا، ما، ی، ا، ب، ج، ر) میں ایک جبریہ رشتہ ملیگا جو لا، ما، ی کی تمام ممکنہ قیمتوں کے لیے، جو کرّہ کی سطح پر واقع ہو سکتی ہیں درست ہوگا۔ اب دو اور تین ابعاد کی فضاء میں کسی دو نقطوں کا باہمی فاصلہ ان کے محدّدوں کی رقوم میں معلوم کیا جائیگا جس کی مدد سے اوپر کے جبریہ تعلقات معیّن شکل میں حاصل ہو سکینگے۔

۱۳۔ دو ابعاد کی فضاء میں کسی دو نقطوں ن۱ ن۲ کے محدّد (لا۱، ما۱) اور (لا۲، ما۲) معلوم ہیں، ان کے درمیان کے فاصلہ کو ان محدّدوں کی رقوم میں معلوم کرو۔ محور علی القوائم ہیں۔

شکل ۱

فرض کرو کہ نقطہ ن کے محدّد (لا۱، ا۱) ہیں اور پ کے (لا۲، ا۲)۔ شکل دیکھنے سے معلوم ہوگا کہ لا۱، ا۱ دونوں منفی مقداریں ہیں اور منفی علامت ان کے اندر چھپی ہوئی ہے۔

ن پ کا مطلق طول مطلوب ہے سروں کے محدّدوں (لا۱، ا۱) اور (لا۲، ا۲) کی رقوم ہیں۔

ن ل پ د، محور ما کے متوازی یعنی لا و لا پر عمود وار کھینچو۔
نیز ن م ر د، محور لا کے متوازی یعنی محور ما پر عمود وار کھینچو۔

تب و ل = لا۱ ل پ = ا۲ اور م ن = -لا۱ و م = ا۱

اب ن پ^2 = ن د^2 + د پ^2 جہاں خطوط کے مطلق فاصلے زیرِ بحث ہیں۔

ن د = ن م + م د = -لا۱ + لا۲ واضح ہو کہ لا۱ منفی مقدار ہے اسے مثبت بنانے کے لیے اس کے ماقبل منفی علامت رکھنا چاہیے تاکہ مطلق طول حاصل ہو۔

اور د پ = د ل + ل پ = -ا۱ + ا۲

پس ن پ^2 = (لا۱ - لا۲)^2 + (ا۱ - ا۲)^2 .... (۱)

یعنی مطلق فاصلہ ن پ = ± $\sqrt{\text{(لا۱ - لا۲)}^2 + \text{(ا۱ - ا۲)}^2}$

مثال ۔ (-۲، ۳) اور (-۳، -۲) کا درمیانی فاصلہ

= $\sqrt{\{-۲ - (-۳)\}^2 + \{۳ - (-۲)\}^2}$

= $\sqrt{۱^2 + ۵^2}$ = $\sqrt{۲۶}$ = ۵٫۰۹...

واضح ہو کہ صرف ان خطوں کے لیے جو محوروں کے متوازی ہیں مثبت منفی فاصلوں کا دستور قائم کیا گیا ہے لیکن کسی اور سمت کے فاصلوں

کے لیے فی الحال کوئی قرار داد اختیار نہیں کی گئی اس لیے ن۱ن۲ کو یا ن۲ن۱ کو مثبت خیال کیا جا سکتا ہے۔

تین ابعاد میں ن۱ (لا۱، ما۱، ی۱) اور ن۲ (لا۲، ما۲، ی۲) کے درمیان کا فاصلہ $= \sqrt{(لا_۱ - لا_۲)^۲ + (ما_۱ - ما_۲)^۲ + (ی_۱ - ی_۲)^۲}$، محور علی القوائم ہیں۔

نیز واضح ہو کہ اگر نقطے ن۱، ن۲ محور لا پر ہوں تو ان کے درمیان فاصلہ = فصل ن۲ – فصل ن۱ = لا۲ – لا۱ اسی طرح اگر یہ محور ما پر ہوں تو ان کے درمیان فاصلہ = ما۲ – ما۱

ایک دائرہ کا مرکز (-۲، ۳) ہے اور نصف قطر ۴، اس کے محیط پر کے نقطوں کے لیے مشترک جبریہ رشتہ معلوم کرو۔

فرض کرو کہ محیط پر کا کوئی نقطہ (لا، ما) سے تعبیر ہوتا ہے، اس نقطہ کا مرکز سے فاصلہ، نصف قطر کے مساوی ہے۔

$$[لا - (-۲)]^۲ + (ما - ۳)^۲ = ۴^۲$$

یعنی $(لا + ۲)^۲ + (ما - ۳)^۲ = ۱۶$

یعنی $لا^۲ + ما^۲ + ۴لا - ۶ما - ۳ = ۰$

یہ رشتہ محیط پر کے کسی نقطہ کے لیے درست ہے۔ اسے دائرہ کی مساوات کہتے ہیں۔ واضح ہو کہ یہ مساوات صرف اس دائرہ کے محیط پر کے کسی نقطہ کے محدّدوں سے پوری ہوگی، کسی اور نقطہ کے محدّد اسے پورا نہیں کر سکتے۔

اسی طرح دائرہ کی مساوات، جس کا مرکز (لا۱، ما۱) اور نصف قطر ر ہے یہ ہوگی

$$(لا - لا_۱)^۲ + (ما - ما_۱)^۲ = ر^۲$$

مشق ۲

۱۔ نقاطِ ذیل کا باہمی فاصلہ دریافت کرو۔

Digitized by Arya Samaj Foundation Chennai and eGangotri

(ا) (-۵، ۳)، (۷، -۲) کے درمیان۔ جواب۔ (ا) ۱۳
(ب) (۱، ۲) اور (-۲، -۳) کے درمیان۔ " (ب) ۸ء ۵
(ج) (۲، ۰)، (۰، ۳) کے درمیان " (ج) ۶ء ۵
(د) (۱، ۱/۲) اور (-۱، ۵/۴) کے درمیان " (د) ۵ء ۸
(ع) (ا، ۰) اور (۰، ب) کے درمیان " (ع) √(ا۲ + ب۲)

۲۔ (ا) ثابت کرو کہ (۰، ۵) نقاط (-۲، ۰) اور (۲، ۰) سے مساوی فاصلوں پر ہے۔ نیز ثابت کرو کہ محور ما پر کے تمام نقطے، نقاط (-۲، ۰) اور (۲، ۰) سے مساوی فاصلوں پر واقع ہیں۔ اس لیے ایسے نقاط کا طریق معلوم کرو جو نقاط (-۲، ۰) اور (۲، ۰) سے مساوی فاصلوں پر ہوں۔ جواب [لا = ۰]

(ب) اسی طرح ثابت کرو کہ نقطہ (+۳، -۳) نقاط (۱، ۰) اور (۰، -۱) سے مساوی فاصلہ پر ہے، اور زاویہ لا و ما کے منصِّف پر کے سب نقطے، نقاط (۱، ۰)، (۰، -۱) سے مساوی فاصلوں پر ہیں، پس ایسے نقاط کا طریق دریافت کرو جو (۱، ۰) اور (۰، -۱) سے مساوی فاصلوں پر ہوں۔ جواب۔ لا + ما =۰

(ج) ثابت کرو کہ (۴، ۸) نقاط (۲، -۱) اور (-۳، ۲) سے مساوی فاصلہ پر واقع ہے۔ نیز ایسے نقاط کا طریق دریافت کرو جو نقاط (۲، -۱)، (-۳، ۲) سے مساوی فاصلہ پر ہوں۔ جواب۔ ۵ لا - ۳ ما + ۴ = ۰

۳۔ (ا) ایک مثلث کے رأس (۴، ۱)، (-۲، ۳)، (۱، -۲) ہیں اس کے اضلاع کے طول دریافت کرو۔ جواب۔ ۸ء ۵، ۲ء ۴، ۳ء ۶

(ب) ثابت کرو کہ چار نقاط (-۱، ۲)، (۳، ۵)، (۲، ۰)، (-۲، -۳) ایک متوازی الاضلاع کے رأس ہیں۔

(ج) ثابت کرو کہ یہ چار نقطے (-۱، ۰)، (۰، ۱)، (۲، -۱)، (۱، -۲) ایک مستطیل کے رأس ہیں۔

(د) ثابت کرو کہ نقطے (۱، ۰)، (۰، √۳) اور (۰، -۱) ایک متساوی الاضلاع مثلث کے سرے ہیں۔

۴۔ (ا) ثابت کرو کہ (۱، -۲) ذیل کے نقاط سے مساوی فاصلہ پر واقع

ہے (۱، -۱)، (۱، -۳)، (۲، -۲)، (۵، -۲)

(ب) ثابت کرو کہ (۱۶، -۹۰۲) نقاط (۱، ۳)، (۲، -۱)، (-۱، ۱)
سے مساوی فاصلہ پر واقع ہے۔

۵- ذیل کے دائروں کی مساواتیں لکھو:-

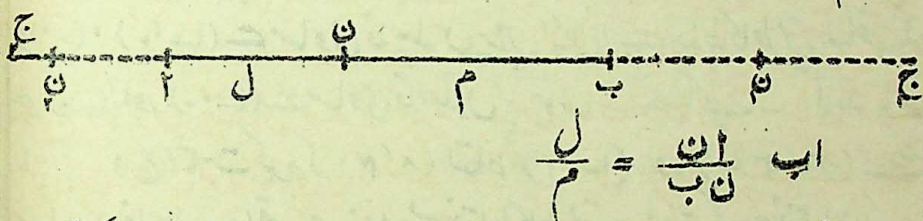
(ا) مرکز مبدا اور نصف قطر ۲، نصف قطر ا - جواب - (ا) $لا^2 + ما^2 = ۴$، $لا^2 + ما^2 = ا^2$

(ب) مرکز (-۲، ۱)، نصف قطر ۳　" (ب) $(لا + ۲)^2 + (ما - ۱)^2 = ۹$

(ج) مرکز (۲، -۳)، نصف قطر ۴　" (ج) $(لا - ۲)^2 + (ما + ۳)^2 = ۱۶$

۱۶- اب خط مستقیم ہے اور اس پر نقطہ ن، ا سے نسبت ل : م میں تقسیم کرتا ہے، نسبت ل : م کی مختلف قیمتیں ہو سکتی ہیں

ج　ن　ا　ل　ن　م　ب　ن　ج

اب　$\frac{ان}{ن ب} = \frac{ل}{م}$

اگر نقطہ ن، ا کے قریب دائیں جانب واقع ہو تو اس نسبت کی قیمت صفر کے قریب ہوگی، اگر نقطہ ن، اب پر حرکت کرتا متصور کیا جائے۔ تو جب یہ اب کے وسطی نقطہ پر ہوگا تو اس نسبت $\frac{ان}{ن ب} = \frac{ل}{م}$ کی قیمت ا ہوگی اور ا سے وسطی نقطہ تک جانے میں یہ نسبت، صفر سے ا تک کی تمام کسری قیمتوں میں سے گذریگی۔ وسطی نقطہ سے ب تک جانے میں یہ ایک سے + ∞ تک کی تمام قیمتوں میں سے گذریگی گویا جب نقطہ ن، ا کے عین دائیں جانب سے شروع ہو کر ب کے عین بائیں جانب تک سفر کریگا تو یہ نسبت $\frac{ان}{ن ب} = \frac{ل}{م}$، صفر سے + ∞ تک کی تمام قیمتوں میں سے گذر جائیگی۔ ب کے عین دائیں جانب اس نسبت کی قیمت - ∞ ہوگی اور جب نقطہ ن، ب سے دائیں جانب لا انتہا فاصلہ پر چلا جائیگا تو یہ نسبت - ∞ سے -ا تک کی

تمام منفی قیمتوں میں سے گذریگی - اب خط پر بائیں جانب لاانتہا فاصلہ پر جو نقطہ ہوگا اس کے لیے بھی نسبت $\frac{\text{ان}}{\text{ن ب}} = \frac{\text{ل}}{\text{م}}$ کی قیمت - ۱ ہوگی اور جب نقطہ ن، بائیں طرف کے لاانتہا فاصلہ سے ۱ کے عین بائیں طرف تک سفر کریگا تو یہ نسبت - ۱ سے صفر تک کی منفی قیمتیں اختیار کریگی۔ پس واضح ہے کہ نسبت کی قیمتوں ۰ سے ∞ تک کے لیے اب پر نقطے ہیں، ∞- سے ۱- تک کے لیے ب ج پر نقطے ہیں جہاں ج، خط پر دائیں جانب لاتناہی پر کا نقطہ ہے اور -۱ سے ۰ تک کے لیے ج، ا پر نقطے ہیں جہاں ج، خط پر بائیں جانب لاتناہی پر کا نقطہ ہے۔ یہ ظاہر ہے کہ ∞- سے ∞+ تک نسبت کی ہر قیمت کے لیے خط پر ایک نقطہ ہے سوائے قیمت -۱ کے لیے جس کے لیے لاتناہی پر کے دو نقطے دائیں اور بائیں جانب ج، اور ج، ہیں، تسلسل اور یکسانیت کو قایم رکھنے کے لیے ریاضی داں یہ فرض کرتے ہیں کہ ج، اور ج، دونوں ایک ہی نقطہ کو تعبیر کرتے ہیں جہاں پر خط کی لاتناہیاں آکے ملتی ہیں - اس کو لاتناہی پر کا نقطہ کہتے ہیں۔ پس $\frac{\text{ل}}{\text{م}}$ کی ہر قیمت کے لیے خط پر ایک اور صرف ایک نقطہ ملتا ہے۔

اب ہم دیکھینگے کہ اگر ایک خط کے سروں کے نقطوں کے محدّد دیے گئے ہوں تو اس خط کو کسی معلومہ نسبت میں تقسیم کرنے والے نقطہ کے محدّد، سروں کے محدّدوں اور معلومہ نسبت کی رقوم میں کیونکر معلوم ہو سکتے ہیں۔

۱۵ء۱ - ایک خطِ مستقیم پر کے دو نقاط ن، (لا، ما،) اور ن، (لا، ما،) دیے گیے ہیں، خط پر کوئی اور نقطہ ن ن، کو نسبت ک، : ک، سے تقسیم کرتا ہے، اس نقطہ کے محدّد دریافت کرو۔

فرض کرو کہ نقطہ ن، خط ن، ن، کو نسبت ک، : ک، سے تقسیم کرتا ہے، اور ن کے محدّد (لا، ما) مطلوب ہیں۔

ان نقاط میں سے خطوط محوروں کے متوازی کھینچو جیسے

شکل میں -

اب $\frac{\text{ک}_2}{\text{ک}_1} = \frac{\text{ن}_1\text{ن}}{\text{ن ن}_2} = \frac{\text{ن}_1\text{س}}{\text{س ط}} = \frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{لا}_2 - \text{لا}}$

پس $\text{ک}_1 (\text{لا} - \text{لا}_1) = \text{ک}_2 (\text{لا}_2 - \text{لا})$

یعنی $\text{لا} (\text{ک}_1 + \text{ک}_2) = \text{ک}_1 \text{لا}_1 + \text{ک}_2 \text{لا}_2$

پس $\text{لا} = \frac{\text{ک}_1 \text{لا}_1 + \text{ک}_2 \text{لا}_2}{\text{ک}_1 + \text{ک}_2}$

اسی طرح متشابہ مثلثوں سے

$$\frac{\text{ن}_1\text{ن}}{\text{ن}_1\text{ن}_2} = \frac{\text{س ن}}{\text{ط ن}_2}$$

یعنی $\frac{\text{ک}_2}{\text{ک}_1 + \text{ک}_2} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{ما}_2 - \text{ما}_1}$

یعنی $(\text{ک}_1 + \text{ک}_2)(\text{ما} - \text{ما}_1) = \text{ک}_2 (\text{ما}_2 - \text{ما}_1)$

یعنی $\text{ما}(\text{ک}_1 + \text{ک}_2) = \text{ک}_1 \text{ما}_1 + \text{ک}_2 \text{ما}_2$

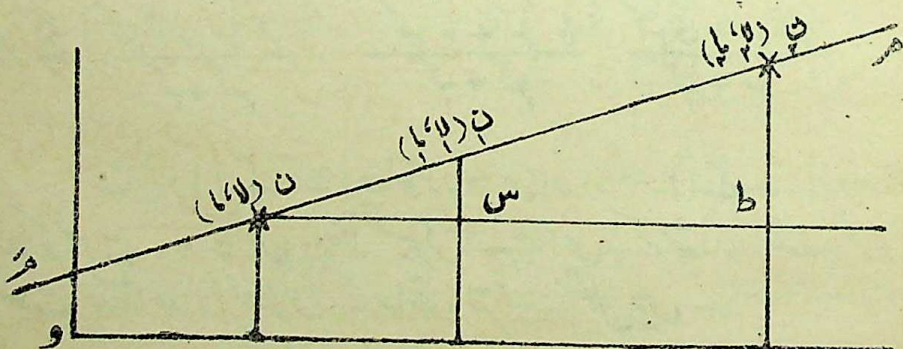
پس $ما = \frac{ک_۲ ما_۱ + ک_۱ ما_۲}{ک_۱ + ک_۲}$

پس نقطہ ن کے محدد $\left(\frac{ک_۲ لا_۱ + ک_۱ لا_۲}{ک_۱ + ک_۲} ، \frac{ک_۲ ما_۱ + ک_۱ ما_۲}{ک_۱ + ک_۲} \right)$ ہیں۔

ن₁ ن₂ کے وسطی نقطہ کے محدد $\left(\frac{لا_۱ + لا_۲}{۲} ، \frac{ما_۱ + ما_۲}{۲} \right)$ ہیں

نسبت $\frac{ک_۲}{ک_۱} = \frac{ن_۱ ن}{ن ن_۲}$ کو مختلف قیمتیں $-\infty$ سے $+\infty$ تک دینے سے خط ن₁ ن₂ پر کے تمام نقطے مل سکتے ہیں۔ بالخصوص جب $ک_۲ = ۰$ تو ن، ن₁ پر منطبق ہوتا ہے اور اس کے محدد وہیں (لا₁، ما₁) ملتے ہیں جیسا کہ ہونا چاہیے، اور جب ن، ن₂ پر منطبق ہوتا ہے تو $ک_۱ = ۰$، محدد (لا₂، ما₂) ملتے ہیں۔

خارجی تقسیم - اگر ن₁ ن₂ کی خارجی تقسیم ن پر نسبت $-\frac{ک_۲}{ک_۱}$ سے ہوئی ہو جہاں ک₂، ک₁ مثبت صحیح عدد ہیں، تو ن کے محدد بآسانی معلوم ہو سکتے ہیں۔

ن₂ (لا₂، ما₂)
ن (لا، ما)
ن₁ (لا₁، ما₁)
س
ط
و
ھ
ھ'

$\frac{ن_۱ ن}{ن ن_۲} = -\frac{ک_۲}{ک_۱}$ واضح ہو گا کہ نقطہ ن خط پر دائیں جانب (ھ) کی طرف واقع ہو گا

اگر ک۲ > ک۱ اور بائیں جانب م کی طرف اگر ک۲ > ک۱۔
خط محوروں کے متوازی کھینچو جیسے شکل میں ۲ متشابہ مثلثوں سے

$$\frac{\text{ک}_2}{\text{ک}_1} = \frac{\text{ن ن}_1}{\text{ن ن}_2} = \frac{\text{ن س}}{\text{ن ط}} = \frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{لا}_2 - \text{لا}}$$

پس ک۱ (لا۲ − لا) = ک۲ (لا۲ − لا) یعنی لا (ک۲ − ک۱) = ک۲ لا۲ − ک۱ لا۱

$$\text{لا} = \frac{\text{ک}_2\text{لا}_2 - \text{ک}_1\text{لا}_1}{\text{ک}_2 - \text{ک}_1} = \frac{\text{ک}_1\text{لا}_1 - \text{ک}_2\text{لا}_2}{\text{ک}_1 - \text{ک}_2}$$ ک۲ > ک۱ شکل میں

اسی طرح $\frac{\text{ک}_2}{\text{ک}_1} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{ما}_2 - \text{ما}}$، یعنی ک۲ (ما۲ − ما) = ک۱ (ما۱ − ما)

$$\text{ما}(\text{ک}_2 - \text{ک}_1) = -\text{ک}_1\text{ما}_1 + \text{ک}_2\text{ما}_2$$

$$\text{یعنی ما} = \frac{\text{ک}_1\text{ما}_1 - \text{ک}_2\text{ما}_2}{\text{ک}_1 - \text{ک}_2}$$

واضح ہو کہ تین ابعاد میں، دو نقطوں ن۱ (لا۱، ما۱، ی۱) اور ن۲ (لا۲، ما۲، ی۲) کے ملانے والے خط کو جو نقطہ نسبت ک۱ : ک۲ سے تقسیم کرتا ہے اس کے محدد ہوں گے

$$\left(\frac{\text{ک}_2\text{لا}_1 + \text{ک}_1\text{لا}_2}{\text{ک}_1 + \text{ک}_2},\ \frac{\text{ک}_2\text{ما}_1 + \text{ک}_1\text{ما}_2}{\text{ک}_1 + \text{ک}_2},\ \frac{\text{ک}_2\text{ی}_1 + \text{ک}_1\text{ی}_2}{\text{ک}_1 + \text{ک}_2}\right)$$ ۔

مثال (۱) ایک نقطہ، نقاط (−۵، ۳) اور (−۴، −۲) کے ملانے والے خط کو نسبت ۷ : ۵ میں داخلاً تقسیم کرتا ہے، اس کے محدد دریافت کرو، نسبت کے اعداد، نقطوں کے ساتھ بالترتیب متعلق ہیں۔

$$\text{لا} = \frac{۷ \times (-۴) + ۵\,(-۵)}{۵ + ۷} = -\frac{۵۳}{۱۲}$$

$$\text{ما} = \frac{۷ \times (-۲) + ۵\,(۳)}{۵ + ۷} = \frac{۱}{۱۲}$$

مثال (۲) ایک نقطہ، نقاط (۶، ۳) اور (-۷، ۲) کے ملانے والے خط کو خارجاً نسبت ۱ : ۵ سے تقسیم کرتا ہے، اس کے محدد دریافت کرو۔

$$\text{لا} = \frac{۵ \times ۶ - ۱ \times (-۷)}{۵ - ۱} = \frac{۳۷}{۴}$$

$$\text{ما} = \frac{۵ \times ۳ - ۱ \times ۲}{۵ - ۱} = \frac{۱۳}{۴}$$

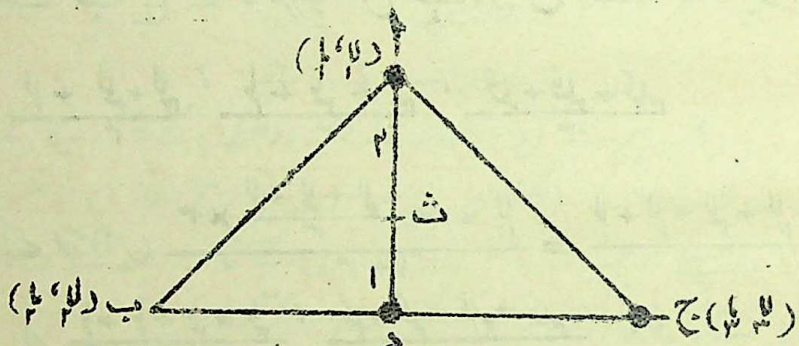
مثال (۳) ایک مثلث، اور چار سطحی کے راسوں کے محدد دیئے ہوئے ہیں، ہندسی مرکز کے محدد معلوم کرو۔

ا (لا۱، ما۱)

۲

ث

۱

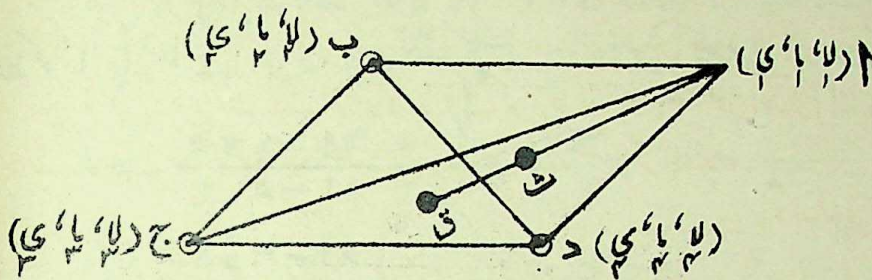
ب (لا۲، ما۲) د ج (لا۳، ما۳)

فرض کرو کہ ب ج کا وسطی نقطہ د ہے۔

مثلث کا مرکزِ ثقل خط ا د پر ہے اور ا کی جانب سے ا د کو نسبت ۲ : ۱ میں تقسیم کرتا ہے،

د کے محدد ہیں $\left(\frac{\text{لا}_۲ + \text{لا}_۳}{۲} ،\ \frac{\text{ما}_۲ + \text{ما}_۳}{۲}\right)$

ث کے محدد ہیں $= \frac{۲ \times \frac{\text{لا}_۲ + \text{لا}_۳}{۲} + ۱ \times \text{لا}_۱}{۲ + ۱} = \frac{\text{لا}_۱ + \text{لا}_۲ + \text{لا}_۳}{۳}$ اور $\frac{\text{ما}_۱ + \text{ما}_۲ + \text{ما}_۳}{۳}$

چار سطحی کے راسوں کے محدد

$(\text{لا}_۱، \text{ما}_۱، \text{ی}_۱)$، $(\text{لا}_۲، \text{ما}_۲، \text{ی}_۲)$، $(\text{لا}_۳، \text{ما}_۳، \text{ی}_۳)$، $(\text{لا}_۴، \text{ما}_۴، \text{ی}_۴)$

چار سطحی کا مرکزِ ثقل ث پر ہے جہاں $\frac{\text{ا ث}}{\text{ث ق}} = \frac{3}{1}$

ق مثلث ب ج د کا مرکزِ ثقل ہے اور ق کے محدد ہیں

$$\frac{\text{لا}_2+\text{لا}_3+\text{لا}_4}{3}\text{، }\frac{\text{یا}_2+\text{یا}_3+\text{یا}_4}{3}\text{، }\frac{\text{ی}_2+\text{ی}_3+\text{ی}_4}{3}$$

ث کے محدد ہیں $\frac{\text{لا}_1\times 1+\frac{\text{لا}_2+\text{لا}_3+\text{لا}_4}{3}\times 3}{1+3} = \frac{\text{لا}_1+\text{لا}_2+\text{لا}_3+\text{لا}_4}{4}$

اور $\frac{\text{یا}_1+\text{یا}_2+\text{یا}_3+\text{یا}_4}{4}$، $\frac{\text{ی}_1+\text{ی}_2+\text{ی}_3+\text{ی}_4}{4}$، وغیرہ۔

مشق ۳

(۱) نقاط (-۳، ۵) اور (-۷، -۶) کے ملانے والے خط کو جو نقطہ داخلاً نسبت ۷ : ۵ میں تقسیم کرتا ہے اس کے محدد معلوم کرو۔

جواب $(-\frac{9}{3}, -\frac{17}{12})$

(۲) اس نقطہ کے محدد معلوم کرو جو (۴، -۳) اور (-۳، +۵) کی نسبت ۷ : ۲ سے تقسیم کرتا ہے۔

جواب $(\frac{22}{9}, -\frac{11}{9})$

(۳) نقاط (۵، ۴)، (-۷، -۲) کے ملانے والے خط کو جو نقطہ خارجاً

نسبت ۱ : ۴ سے تقسیم کرتا ہے اس کے محدّد دریافت کرو۔

جواب (۹، ٦)

(۴) اُس نقطہ کے محدّد دریافت کرو جو نقاط (۲، ۳) اور (۴، -۷) کے ملانے والے خط کو خارجاً نسبت ۲ : -۳ سے تقسیم کرتا ہے۔

جواب (-۲، ۲۳)

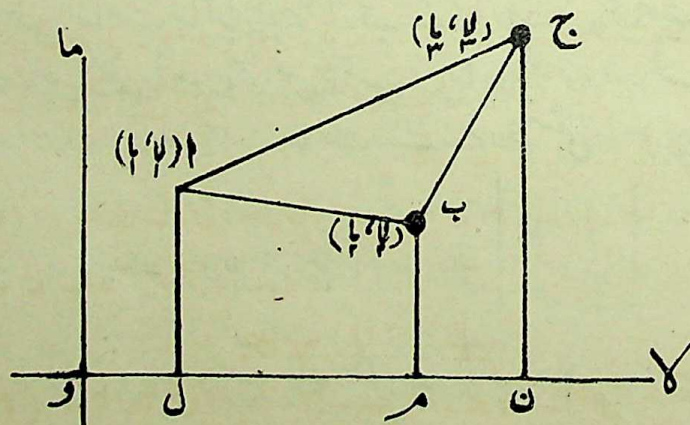
(۵) معلوم کرو کہ محور لا نقاط (۳، ۴) اور (-۲، -۵) کے ملانے والے خط کو کس نسبت سے تقسیم کرتا ہے۔

جواب $\frac{۴}{۵}$

(٦) اُس مثلث کا مرکزِ ہندسی دریافت کرو جس کے راسوں کے محدّد (-۳، ۷)، (۲، ۴)، (۳، ۵) ہوں۔

جواب $\frac{۲}{۳}$، $\frac{۱٦}{۳}$

۱٦ — ہم نے اوپر دیکھا ہے کہ جب دو نقطوں کے محدّد دیے گئے ہوں تو اُن کے ملانے والے خط کا فاصلہ ان محدّدوں کی رقوم میں حاصل ہو سکتا ہے۔ اب ہم دیکھینگے کہ جب ایک مثلث کے راسوں کے محدّد دیے گئے ہوں تو اس کا رقبہ ان محدّدوں کی رقوم میں کیونکر معلوم ہو سکتا ہے۔

ایک مثلث ا ب ج کے راسوں ا، ب، ج کے محدّد بالترتیب (لا$_1$، یا$_1$)، (لا$_2$، یا$_2$)، (لا$_3$، یا$_3$) ہیں، اس کا رقبہ دریافت کرو۔

△ ا ب ج = ا ل ن ج ۔ ا ل م ب ۔ ب م ن ج

منحرف ا ل ن ج = △ ا ل ن + △ ا ن ج

$$= \frac{1}{2}(لا_3 - لا_1)\,يا_1 + \frac{1}{2}(لا_3 - لا_1)\,يا_3$$

$= \frac{1}{2}(يا_1 + يا_3)(لا_3 - لا_1) =$ اوسط متوازی اضلاع × درمیانی عمودی فاصلہ

منحرف ا ل م ب $= \frac{1}{2}(يا_1 + يا_2)(لا_2 - لا_1)$

منحرف ب م ن ج $= \frac{1}{2}(يا_2 + يا_3)(لا_3 - لا_2)$

اس لیے رقبہ △ ا ب ج $= \frac{1}{2}\left\{(يا_1 + يا_3)(لا_3 - لا_1)(يا_1 + يا_2)(لا_2 - لا_1)(يا_2 + يا_3)(لا_3 - لا_2)\right\}$

$$= \frac{1}{2}\left\{لا_1 يا_2 - لا_2 يا_1 + لا_2 يا_3 - لا_3 يا_2 + لا_3 يا_1 - لا_1 يا_3\right\}$$

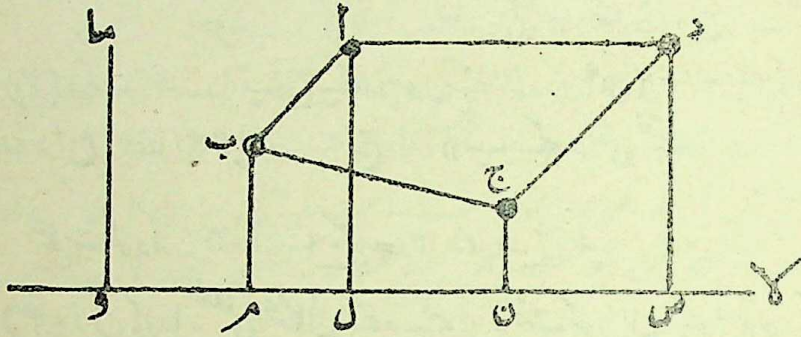
اس جملہ کو ایک مقطعہ کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے، یہ محض اُوپر کے جملہ کو لکھنے کا ایک طریقِ کتابت ہے جو آسانی سے یاد رہ سکتا ہے۔

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} لا_1 & لا_2 & لا_3 \\ يا_1 & يا_2 & يا_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

یاد رہے کہ مثلث ا ب ج کا رقبہ حاصل کرنے میں، مثلث کے راسوں کو مخالف سمتِ ساعت لیا گیا ہے، یا رقبہ کے گرد جانے میں رقبہ ہمیشہ بائیں ہاتھ کو رہتا ہے۔ جب کبھی راسوں کو اس ترتیب میں لیا جائیگا تو رقبہ مُثبت حاصل ہوگا اور راسوں کو مخالف سمتِ ساعت لینے سے رقبہ منفی حاصل ہوگا۔

رقبہ △ د ا ب $= \frac{1}{2}(لا_1 يا_2 - لا_2 يا_1) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} لا_1 & يا_1 \\ لا_2 & يا_2 \end{vmatrix}$

مثال (۱) ایک چار ضلعی کے راسوں ا، ب، ج، د کے

محدد مخالف سمتِ ساعت $(لا_1، ما_1)$، $(لا_2، ما_2)$، $(لا_3، ما_3)$، $(لا_4، ما_4)$ ہیں۔ اس کا رقبہ دریافت کرو، محور قائم ہیں۔

چار ضلعی ا ب ج د = ا ب م ل + ا ل ص د ۔ ب م ن ج ۔ ج ن ص د

$$= \frac{1}{2}\{(ما_1+ما_2)(لا_1-لا_2)+(ما_1+ما_4)(لا_4-لا_1)-(ما_2-ما_3)(لا_3-لا_2)-(ما_3+ما_4)(لا_4-لا_3)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{لا_1ما_2-لا_2ما_1+لا_2ما_3-لا_3ما_2+لا_3ما_4-لا_4ما_3+لا_4ما_1-لا_1ما_4\}$$

مشق ۴

(۱) نقاطِ ذیل کو ملانے سے جو مثلث بنتے ہیں اُن کے رقبے دریافت کرو۔

(ا) (۲، ۰)، (−۳، ۴)، (−۱، −۲)

(ب) (۱، ۲)، (−۳، ۲)، (۲، −۴)

(ج) (۱، ۲)، (۲، −۳)، (−۳، ۲)

واضح ہو کہ (ج) میں راسوں کی ترتیب موافق سمتِ ساعت لی گئی ہے۔ نقطوں کو (ب) اور (ج) کی صورت میں مرتسم کر کے دیکھا جائے۔

(د) (۲، ۳)، (۳، ۴)، (۶، ۲)

موافق سمتِ ساعت

(ع) (۴، -۵)، (۳، -۴)، (۲، ۳)

موافق سمتِ ساعت

جواب - (ا) ۱۱ (ب) ۱۲ (ج) -۱۳ (د) -۱ (ع) — ۳

(۲) ایک مثلث ا ب ج کے راسوں کے محدد (-۲، ۴)، (۴، ۳)، (۶، ۰) ہیں اور د، ع، ف اضلاع ب ج، ج ا، ا ب کے وسطی نقطے ہیں۔

ثابت کرو کہ △ ا ب ج = ۴ △ د ع ف

(۳) ذیل کی چار ضلعی اشکال کے رقبے دریافت کرو، ان کے راسوں کے محدد حسب ذیل ہیں۔

(ا) (۱، ۲)، (۵، ۳)، (۴، ۵)، (۳، ۴)

(ب) (۲، ۳)، (-۲، ۴)، (-۳، -۲)، (۱، -۲)

(ج) (۲، ۳)، (۱، -۲)، (-۳، -۲)، (-۲، ۴)

موافق سمتِ ساعت

(د) (۲، ۳)، (-۳، -۲)، (۱، -۴)، (-۲، ۴)

ان نقاط کو مرتسم کر کے دیکھا جائے آڑے نقطوں کو ملانے سے دو مثلث بنتے ہیں، محصلہ رقبہ ان مثلثوں کے رقبوں کا فرق ہے۔

جواب - (ا) $\frac{۹}{۲}$ (ب) $\frac{۴۵}{۲}$ (ج) $-\frac{۴۵}{۲}$ (د) $-\frac{۱}{۲}$

۱۷- قطبی محدد

- دو ابعاد میں کوئی نقطہ ن ہے، جس کا مقام معین کرنا مقصود ہے کارٹیزی محددوں میں ضروری ہے کہ

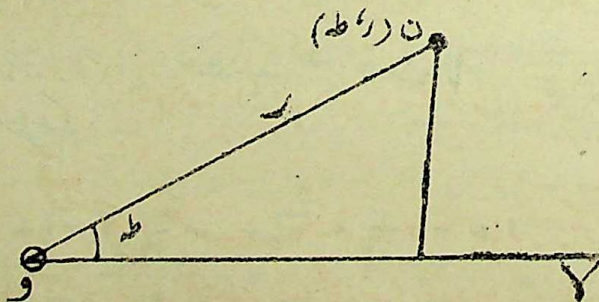
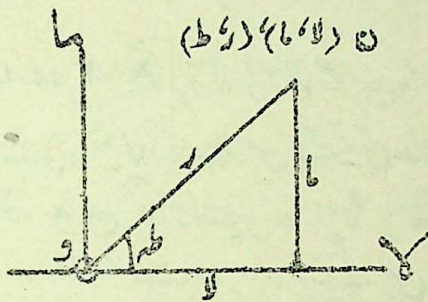
ایک مبداء ہو اور اس میں سے گذرنے والے دو علی القوائم خط، اور نقطہ میں سے ان محوروں کے متوازی خط کھینچے جائیں وغیرہ وغیرہ - یہاں صرف مبداء و لو جسے قطب کہتے ہیں اور و لا ابتدائی خط مقرر کرو - و سے سیدھا فاصلہ ن کا

و ن = ۳ انچ یا ۳ یا عام طور پر ر،

اور خط و ن کس سمت میں کھینچا گیا ہے اس کے تعین کے لیئے ابتدائی یا حوالہ کے خط کے ساتھ و ن کا زاویہ = ۳۰° یا ط - ہم یہ قرار داد اختیار کرتے ہیں کہ ط کو مخالف سمتِ ساعت ناپینگے - پس ن کا مقام دو محددوں (ر، ط) سے معین ہو سکتا ہے - پس نقطہ کے قطبی محدد ایسے ہونگے،

(۳، $\frac{\pi}{4}$)، (۲، ۳۰°)، (۲، ۳| $\frac{3\pi}{2}$)، (ل، ع)، (ر، ط)، (ر، ط) انہیں مرتسم کرو -

ظاہر ہے کہ مساوات ر = ل سے ایسے نقطے ملینگے جن کا فاصلہ مبداء سے ل ہو، ط خواہ کچھ ہی ہوا کرے - پس ر = ۲ ایسے دائرہ کی قطبی مساوات ہے جس کا مرکز مبداء اور نصف قطر ۲ ہے، ر = ل دائرہ کی قطبی مساوات ہے جس کا مرکز مبداء اور نصف قطر ل ہے -

نیز ط = ۳۰° یا ع سے ایسے خط پر کے نقطے ملتے ہیں جو مبداء میں سے گزرتا ہے - اور ابتدائی خط و لا کے ساتھ ۳۰° کا یا زاویہ ع بناتا ہے - پس ط = ع مبداء میں سے گزرنے والے خط کی مساوات ہے

جس کا میلان ابتدائی خط کے ساتھ دیا ہوا زاویہ ط ہے۔
کارٹیزی اور قطبی محدّدوں میں تعلق بآسانی حاصل ہو سکتا ہے۔

نقطہ ن کے دو نام ہیں کارٹیزی (لا، ما) اور قطبی (ر، ط)۔ نقطہ وہی ہے اس لیے محدّدوں میں تعلق ہونا چاہیے۔ صریحاً

$$\left.\begin{aligned} \text{لا} &= \text{ر جم ط} \\ \text{ما} &= \text{ر جب ط} \end{aligned}\right\} \quad (۱)$$

جس سے

$$\left.\begin{aligned} \text{ر} &= \pm\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2} \\ \text{ط} &= \text{مس}^{-1}\frac{\text{ما}}{\text{لا}} \end{aligned}\right\} \quad (۲)$$

پس اگر کسی نقطہ کے قطبی محدّد معلوم ہوں تو (۱) سے کارٹیزی حاصل ہو سکتے ہیں اور اگر کارٹیزی معلوم ہوں تو قطبی حاصل ہو سکتے ہیں۔ علامات کا بآسانی فیصلہ ہو سکتا ہے۔

مثال ۱ - (د) ایک نقطہ کے قطبی محدّد $(+\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ ہیں اس کے کارٹیزی محدّد معلوم کرو۔

$$\text{لا} = +\sqrt{2}\ \text{جم}\ \frac{\pi}{4} = +\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = +1$$

$$\text{ما} = +\sqrt{2}\ \text{جب}\ \frac{\pi}{4} = +\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = +1$$

(ب) ایک نقطہ کے کارٹیزی محدّد ($\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$ ، $-\frac{۳}{۲}$) ہیں، اس کے قطبی محدّد معلوم کرو۔

لا = $\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$ ، ما = $-\frac{۳}{۲}$ ، یہ نقطہ چوتھے رُبع میں ہے۔

لا = $\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$ = ر جم ط

ما = $-\frac{۳}{۲}$ = ر جب ط

ر² = $\frac{۳}{۴} + \frac{۳}{۴} = \frac{۶}{۴}$ ، ر = $\pm\sqrt{\frac{۳}{۲}}$ ہم طے کرتے ہیں کہ ر کی علامت خواہ کسی ربع میں ہو مثبت لی جائیگی ر = $+\sqrt{\frac{۳}{۲}}$

مس ط = $-\frac{۳}{۲} \times \frac{۲}{\sqrt{۳}} = -\sqrt{۳}$

پس ط = ۱۲۰° یا ۳۰۰°

اب نقطہ چونکہ چوتھے رُبع میں ہے اس لیے ط = $\frac{۵\pi}{۳}$

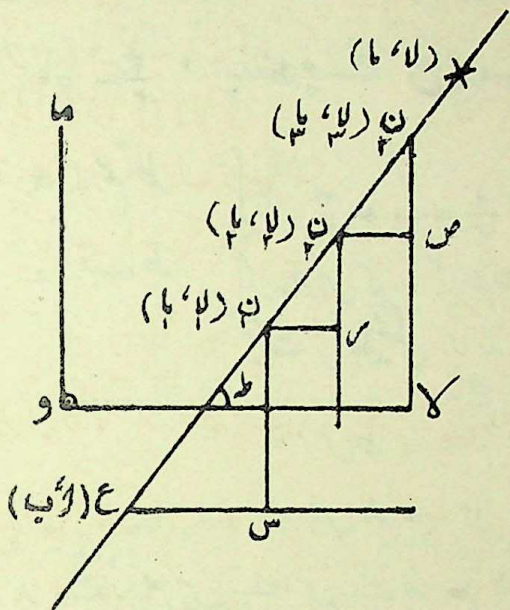
اس چھوٹی سی کتاب میں قطبی محدّدوں کا استعمال مقصود نہیں ہے، ہمیشہ کارٹیزی محدّد استعمال کئے جائینگے۔ تاہم طالبِ علم کو محض تعریفات سے مانوس کر دینا مناسب خیال کیا گیا۔

۱۸۔ اکثر منحنیات کی تعیین ان کے ہندسی خواص سے ہوتی ہے

یعنی ان پر کے تمام نقطوں میں ایک مشترک ہندسی تعلق پایا جاتا ہے جس کی بنا پر ان کی تعریف کی جاتی ہے۔ مثلاً خطِ مستقیم پر کے تمام نقطے ایک ہی سیدھ میں ہوتے ہیں۔

اس امر کو جبریہ رقوم میں بیان کرنے سے ہمیں جبریہ رشتہ ملیگا جس کو خط پر کے تمام نقطے پورا کرینگے۔ مثلاً فرض کرو کہ خط محور و لا سے زاویہ ط بناتا ہے اور نقطہ (د، ب) میں سے گذرتا ہے اور اس پر نقطے (لا۱، ما۱)، (لا۲، ما۲)..... واقع ہیں۔ یہ سب نقطے ایک سیدھ میں ہیں، اس امر کو یوں بیان کیا جاتا ہے کہ

$$\frac{ن_۱ س}{ع س} = \frac{ن_۲ ر}{ن_۱ ر} = \frac{ن_۳ ص}{ن_۲ ص} \ldots\ldots = \text{مس ط}$$

پس محدّدوں کی رقوم میں $\frac{\text{ما}_1 - \text{ب}}{\text{لا}_1 - \text{ل}} = \frac{\text{ما}_2 - \text{ما}_1}{\text{لا}_2 - \text{لا}_1} = \frac{\text{ما}_3 - \text{ما}_2}{\text{لا}_3 - \text{لا}_2} = \dots\dots = \text{مس ط}$

اگر کوئی نقطہ (لا، ما) اس خط پر بطور نمایندہ نقطہ کے لیا جائے۔

تو $\frac{\text{ما} - \text{ب}}{\text{لا} - \text{ل}} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{لا} - \text{لا}_1} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_2}{\text{لا} - \text{لا}_2} = \dots\dots\dots = \text{مس ط}$

یہ سب رشتے ایک ہی ہیں، ان میں سے کوئی ایک

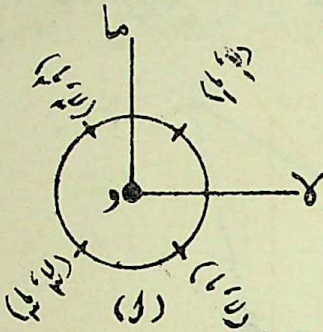
$\text{ما} - \text{ب} = \text{مس ط}\,(\text{لا} - \text{ل}) \dots\dots (1)$

خطِ مستقیم کی مساوات ہے، خطِ مستقیم پر کے تمام نقطوں کے محدّد اس مساوات کو پورا کرتے ہیں۔ برعکس اس کے مساوات (۱) کے کئی حل ہیں، یعنی لا، ما کی قیمتوں کے بے شمار جوڑے ہیں جو مساوات (۱) سے حاصل ہوتے ہیں۔ ان سب کو اگر مرتسم کیا جائے تو ان سب جوڑوں سے نقطے ملینگے جو اس خط پر واقع ہونگے، اور کہیں اور واقع نہیں ہو سکتے۔ خطِ مستقیم مساوات کا طریق یا لوکس کہلاتا ہے۔

اسی طرح دائرہ کے محیط پر کے سب نقطوں کی مشترک خاصیت یہ ہے کہ

ان نقطوں کا فاصلہ اس کے مرکز سے مستقل ہوتا ہے۔

اگر مبداء مرکز ہو اور نصف قطر ۲،
اور محیط پر نقطے $(\text{لا}_1, \text{ما}_1)$، $(\text{لا}_2, \text{ما}_2)$، $(\text{لا}_3, \text{ما}_3)$......
ہوں تو اس ہندسی خاصیت کو یوں بیان
کر سکتے ہیں $(\text{لا}_1 - 0)^2 + (\text{ما}_1 - 0)^2 = 4$

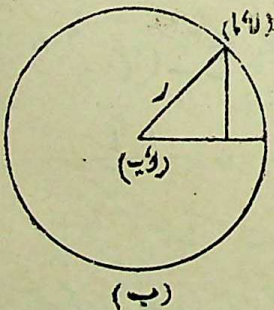
$$(\text{لا}_2 - 0)^2 + (\text{ما}_2 - 0)^2 = 4$$

اگر ان سب نقطوں کا نمایندہ نقطہ (لا، ما) محیط پر کہیں واقع ہو تو حاصل ہوگا

$$(\text{لا} - 0)^2 + (\text{ما} - 0)^2 = 4$$

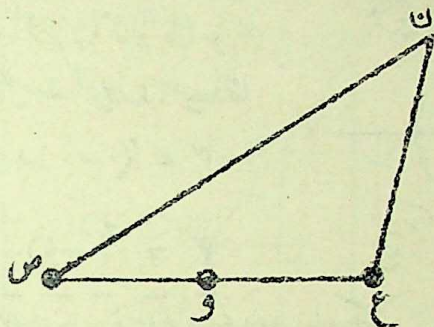
یعنی $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = 4$

جو دائرہ کی مساوات ہے، اس مساوات کے حل کرنے سے (لا، ما) کی قیمتوں کے بیشمار جوڑے ملینگے، مرتسم کرنے سے وہ سب اس دائرہ کے محیط پر واقع ہونگے پس دائرہ اس مساوات کا طریق ہے۔

اسی طرح دائرہ جس کا مرکز (ا، ب) اور نصف قطر ر ہو، حسبِ ذیل ہوگا۔ جبکہ (لا، ما) کوئی نمایندہ نقطہ اس کے محیط پر ہو

$$(\text{لا} - \text{ا})^2 + (\text{ما} - \text{ب})^2 = \text{ر}^2 \quad ......(1)$$

پس (۱) دائرہ کی مساوات ہے اور مساوات (۱) کا طریق دائرہ (ب) ہے

نیز فرض کرو ایک منحنی کی ہندسی تعریف یہ ہے کہ اس پر کے کسی نقطہ کے فاصلوں کا مجموعہ دو ثابت نقطوں سے مستقل رہتا ہے، اس کی مساوات مطلوب ہے۔ دو ثابت نقطے فرض کرو ع ص ہیں، مبداء و ان کا نقطہ وسطی لو۔

اس کی ہندسی تعریف ع ن + ص ن = مستقل ہے، فرض کرو کہ

ع کے محدّد (ا، ۰)، ص کے (−ا، ۰) اور ن کے (لا، ما) ہیں، اوپر کے تعلق کو ان محدّدوں کی رقوم میں بیان کرنے سے

$$\sqrt{(\text{لا}-\text{ا})^2+\text{ما}^2}+\sqrt{(\text{لا}+\text{ا})^2+\text{ما}^2}=\text{مستقل}=2\text{ج}$$ (فرض کرو)

$$(\text{لا}-\text{ا})^2+\text{ما}^2=4\text{ج}^2+(\text{لا}+\text{ا})^2+\text{ما}^2-4\text{ج}\sqrt{(\text{لا}+\text{ا})^2+\text{ما}^2}$$

$$-4\,\text{لا}\,\text{ا}-4\text{ج}^2=-4\text{ج}\sqrt{(\text{لا}+\text{ا})^2+\text{ما}^2}$$

$$(\text{لا}\,\text{ا}+\text{ج}^2)^2=\text{ج}^2\left[(\text{لا}+\text{ا})^2+\text{ما}^2\right]$$

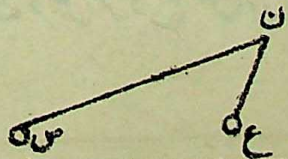
$$\text{لا}^2(\text{ا}^2-\text{ج}^2)-\text{ج}^2\text{ما}^2=\text{ج}^2\text{ا}^2-\text{ج}^4=\text{ج}^2(\text{ا}^2-\text{ج}^2)$$

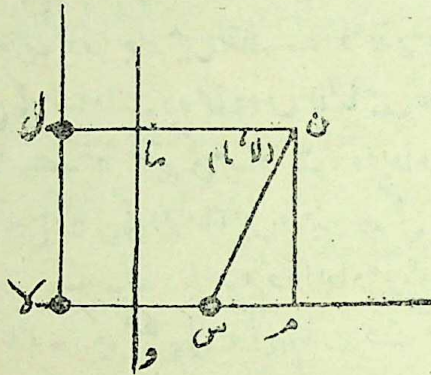
$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ج}^2}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ج}^2-\text{ا}^2}=1$$

یہ منحنی کی مساوات ہے، ہم آگے دیکھینگے کہ یہ قطع ناقص ہے جس کا مرکز مبدا، نیم محورِ اعظم ج اور نیم محورِ اصغر $\sqrt{\text{ج}^2-\text{ا}^2}$ ہے۔

اسی طرح طالبِ علم معلوم کرے کہ اس منحنی کی مساوات کیا ہے جس کے ہر نقطہ کی ہندسی خاصیت یہ ہے کہ دو ثابت نقطوں سے اس کے فاصلوں کا فرق مستقل رہتا ہے یعنی

ص ن − ع ن = مستقل

ن
ص ع

ہم جانتے ہیں کہ قطع مکافی پر کے ہر نقطہ ن کی ہندسی خاصیت یہ ہے کہ ایک ثابت نقطہ (س) سے اس کا فاصلہ، ایک ثابت خط (لا ل) سے اس کے عمودی فاصلہ کے مساوی ہوتا ہے ۔ یعنی

س ن = ن ل

مبداء ہمیشہ موزوں مقام پر لینا چاہیے اور دھر بھی ایسے ہر سوال میں لینا چاہییں کہ اس مبداء اور محددوں کے لحاظ سے مساوات سادہ سے سادہ شکل میں آئے ۔

س لا ثابت خط لا ل پر عمود ہے، مبداء و، س لا کے وسطی نقطہ پر لو اور و س کو محور لا اور علی القوائم و ما لو ۔ س لا ثابت فاصلہ ہے ۔

فرض کرو کہ و س = لا و = مستقل = د ۔

نقطہ ن (لا، ما) ہے، س (د، ۰) ۔

اب س ن = ن ل = لا م

س ن^2 = لا م^2

(لا - د)^2 + (ما - ۰)^2 = (لا و + و م)^2 = (د + لا)^2

پس لا^2 - ۲ لا د + د^2 + ما^2 = د^2 + ۲ د لا + لا^2

پس ما^2 = ۴ د لا مکافی کی مساوات حاصل ہوتی ہے

اسی طرح کی اور بے شمار مثالیں بڑھائی جا سکتی ہیں۔

پس ہم دیکھتے ہیں کہ جب کسی منحنی پر کے تمام نقطوں میں ایک مشترک ہندسی خاصیت پائی جاتی ہے تو اس پر کے کسی نقطہ (لا، ما) کی رقوم میں ہمیں اس کے حائل ایک مساوات ملتی ہے۔ ہم نے صرف ایسے منحنیات پر غور کیا ہے جو دو ابعاد کی سطح میں واقع ہوتے ہیں، دو ابعاد میں نقطہ کے دو محدّد ہونگے (لا، ما) اس لیے دو ابعاد والے منحنی کی مساوات دو محدّدوں لا، ما میں حاصل ہوگی۔

ہم نے دیکھا ہے کہ خطِ مستقیم کی مساوات دو ابعاد (لا، ما) میں درجۂ اول کی ہے، دائرہ، قطع ناقص، مکافی کی (لا، ما) میں درجۂ دوم کی ہے۔ اسی طرح اعلیٰ درجہ کے منحنیات کے لیے۔ بالعموم دو ابعاد میں کوئی منحنی ہو تو اس کی مساوات ف (لا، ما) = ۰ کی شکل کی ہوگی جہاں ف تفاعلی علامت ہے۔

مشق ۵

(۱) ایک نقطہ ایسے حرکت کرتا ہے کہ اس کے فاصلے دو نقطوں (۳، ۲) اور (۵، -۲) سے مساوی ہیں، طریق کی مساوات دریافت کرو۔

جواب - لا - ۲ ما - ۳ = ۰

(۲) ایک نقطہ (ن) اس طرح حرکت کرتا ہے کہ نقطہ (۲، ۰) سے اس کا فاصلہ ہمیشہ دو چند رہتا ہے نقطہ (۲، ۰) سے اس کے فاصلہ کے۔ ن کا طریق دریافت کرو۔

جواب - لا^2 + ما^2 + ۱۰ لا + ۴ = ۰

(۳) ایک نقطہ کا فاصلہ محور لا سے مساوی رہتا ہے نقطہ (۱، -۱) سے اس کے فاصلہ کے۔ نقطہ کا طریق دریافت کرو۔

جواب لا^2 - ۲ لا + ۲ ما + ۲ = ۰

(۴) (ا) ایسے نقطہ کے طریق کی مساوات مطلوب ہے، محوروں سے جس کے فاصلوں کا مجموعہ ۵ ہے۔ جواب لا + ما = ۵

(ب) نقطہ کا طریق مطلوب ہے جس کا فاصلہ محور ما سے مساوی ہے نقطہ (۱، ۲) سے

اس کے فاصلہ کے۔

جواب (ا) لا + ما = ۵ (ب) ما۲ - ۲ لا - ۴ ما + ۵ = ۔

(۵) (ا) ایک نقطہ مبداء سے فاصلہ ۵ پر رہتا ہے، اس کے طریق کی مساوات مطلوب ہے۔

(ب) نقطہ کے طریق کی مساوات معلوم کرو جس کا فاصلہ نقطہ (۲، ۳) سے ہمیشہ ۴ کے مساوی ہوتا ہے۔

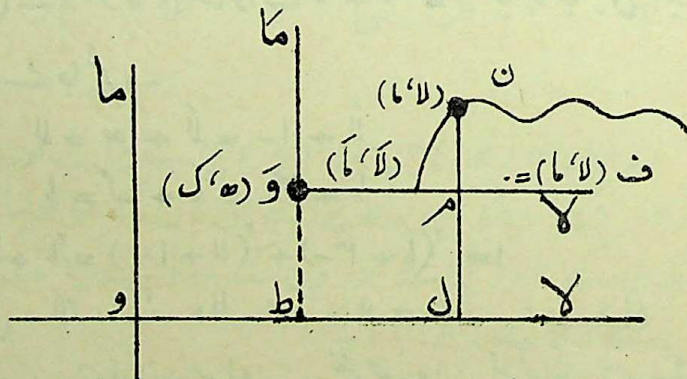
جواب - (ا) ر = ۵ (ب) لا۲ + ما۲ - ۴ لا - ۶ ما - ۳ = ۔

(۶) نقطہ کا فاصلہ (۳، ۰) سے مساوی ہوتا ہے محور ما سے اس کے فاصلہ کے، نقطہ کے طریق کی مساوات مطلوب ہے۔

جواب ما۲ - ۶ لا + ۹ = ۔

۱۰۹ - محدّدوں کی تبدیلی

کسی مبداء اور محوروں کے لحاظ سے، کسی نقطہ کے محدّدوں کا تعیّن کیا جاتا ہے، اگر مبداء کو یا محوروں کو یا مبداء اور محور دونوں کو بدل دیا جائے تو اسی نقطہ کے محدّد بدل جائینگے۔ محور قائم فرض کیے جائینگے۔

(ا) مبداء کی تبدیلی۔ فرض کرو کہ نقطہ ن کے محدّد

بلحاظ مبداء و اور محاور ولا، وما (لا، ما) ہیں، مبداء کو وَ (ھ، ک) پر

لے جاتے ہیں اور نئے محور و لاَ ، و ماَ پرانے محوروں کے متوازی رہتے ہیں یعنی ان کی سمت وہی رہتی ہے۔
ن سے عمود ن مر ل نکالو۔

لا = ول = وط + وم = ھ + لاَ

ما = ل ن = ل مر + مرن = ک + ماَ

پس پرانے اور نئے محدّدوں میں یہ رشتہ ہوگا لا = ھ + لاَ
ما = ک + ماَ

یعنی پرانے لا کی بجائے مبداء کا فصلہ + نیا لا
اور پرانے ما کی بجائے مبداء کا معین + نیا ما
رکھنا چاہئے۔

اور اگر پرانے محوروں کے لحاظ سے کوئی مساوات ف (لا ، ما) = ۰ دی گئی ہو جس کے طریق پر نقطہ ن (لا ، ما) واقع ہوتا ہے تو یہی مساوات نئے محوروں کے لحاظ سے ف (ھ + لاَ ، ک + ماَ) = ۰ ہو جائیگی یعنی نئی مساوات پرانی مساوات میں لا کی بجائے ھ + لاَ اور ما کی بجائے ک + ماَ رکھنے سے ملیگی۔

مثال — دائرہ کی مساوات لا^۲ + ما^۲ = ۱ کیا ہو جائیگی جبکہ مبداء کو (-۱ ، -۳) پر لے جائیں۔

لا = ھ + لاَ = -۱ + لاَ

ما = ک + ماَ = -۳ + ماَ

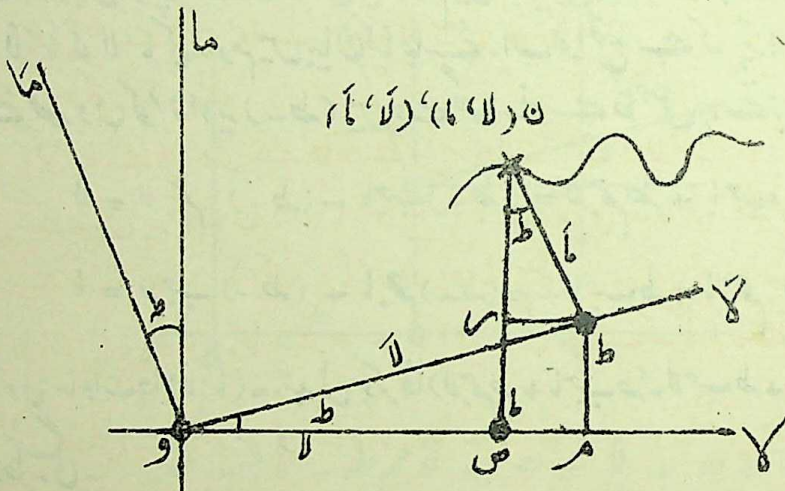
پس لا^۲ + ما^۲ = (-۱ + لاَ)^۲ + (-۳ + ماَ)^۲ = ۱

یعنی لاَ^۲ + ماَ^۲ - ۲لاَ - ۶ماَ + ۹ = ۰ (۱)

اگر یہ ذہن میں رہے کہ اب مساوات نئے محوروں کے لحاظ سے ہے اور زبر حذف کر دیے جائیں تو مساوات ہوگی

لا^۲ + ما^۲ - ۲لا - ۶ما + ۹ = ۰ (۲)

نئے مبداء (ق) کے محدّد بلحاظ پرانے مبداء و کے (-۱، -۳) ہیں اور پرانے مبداء (و) کے محدد بلحاظ نئے مبداء (ق) کے (۱، ۳) ہونگے، اس لیے مساوات کو واپس پرانے مبداء پر لے جانے کے لیے مساوات (۱) میں لاَ کی بجائے ۱+ لا اور مَا کی بجائے ۳ + ما رکھنا ہوگا، اس اندراج سے وہی پہلی مساوات لا^۲ + ما^۲ = ۱ حاصل ہوگی۔

(ب) محوروں کی تبدیلی۔ فرض کرو کہ مبداء وہی رہتا ہے مگر محوروں کو زاویہ ط میں سے گھما دیا جاتا ہے، ایک ہی نقطہ کے محدّد، ہر دو نظام کے لحاظ سے مختلف ہونگے۔

دونوں صورتوں میں مبداء و وہی ہے، پرانے محور و لا و ما ہیں اور نئے محور و لاَ، و مَا زاویہ ط پرانے محوروں کے ساتھ بناتے ہیں۔ کسی نقطہ ن کے محدد پرانے محوروں کے لحاظ سے (لا، ما) ہیں اور نئے محوروں کے لحاظ سے (لاَ، مَا)۔

لا = وص = وم - ص م = وم - رط = لاَ جم ط - مَا جب ط

ما = ص ن = ص ر + ر ن = م ط + ر ن = لاَ جب ط + مَا جم ط

اس لیے اگر پرانے محوروں (یعنی حوالہ کے نظام) کے لحاظ سے کسی منحنی کی مساوات ف (لا، ما) = ۰ ہو تو نئے محوروں کے لحاظ سے یہ مساوات بدل کر ہو جائیگی -

ف (لاَ جم ط - مَا جب ط، لاَ جب ط + مَا جم ط) = ۰

اگر یہ امر ذہن میں رہے کہ اب نئے محدّدوں کی رقوم میں مساوات ہے تو زبروں کو حذف کیا جا سکتا ہے یعنی مساوات ہو جائیگی -

ف (لا جم ط - ما جب ط، لا جب ط + ما جم ط) = ۰

اب فرض کرو کہ کوئی مساوات نئے محدّدوں لاَ، مَا کی رقوم میں دی ہوئی ہے اور اس کو پرانے محدّدوں کی رقوم میں تبدیل کرنا مقصود ہے تو ضروری ہے کہ لاَ، مَا کو لا، ما کی رقوم میں بیان کیا جائے - اب واضح ہے کہ پرانے محور نئے محوروں کو زاویہ (- ط) میں سے گھمانے سے حاصل ہوتے ہیں اس لیے

لاَ = لا جم (- ط) - ما جب (- ط) = لا جم ط + ما جب ط

مَا = لا جب (- ط) + ما جم (- ط) = - لا جب ط + ما جم ط

اور کوئی مساوات فا (لاَ، مَا) = ۰ تبدیل ہو کر فا (لا جم ط + ما جب ط، - لا جب ط + ما جم ط) = ۰ ہو جائیگی -

مثال ۱ - ایک منحنی کی مساوات لا^2 - ما^2 = ا ہے، محوروں کو مبداء کے گرد (- $\frac{\pi}{4}$) میں سے پھرا دیا گیا ہے، معلوم کرو کہ بدل کر مساوات کیا ہو جاتی ہے -

لا = لاَ جم (- $\frac{\pi}{4}$) - مَا جب (- $\frac{\pi}{4}$) = $\frac{\text{لاَ + مَا}}{\sqrt{2}}$

ما = لاَ جب (- $\frac{\pi}{4}$) + مَا جم (- $\frac{\pi}{4}$) = $\frac{\text{- لاَ + مَا}}{\sqrt{2}}$

لا^2 - ما^2 = ا ہو جاتی ہے نئے محدّدوں کی رقوم میں $\left(\frac{\text{لاَ + مَا}}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{\text{- لاَ + مَا}}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$

یعنی $\frac{+۴ لاَ ماَ}{۲} = ۱$، یعنی لاَ ماَ = $\frac{۱}{۲}$

پس نئے محدّدوں کی رقوم میں منحنی کی مساوات ہے لا ما = $\frac{۱}{۲}$

(ج) اگر مبداء کو (ھ، ک) پر لے جائیں اور محوروں کو زاویہ ط میں سے گھماویں تو پرانے اور نئے محدّدوں میں یہ رشتہ ہوگا۔

لا = ھ + لاً = ھ + لاً جم ط - ماً جب ط

ما = ک + ماً = ک + لاً جب ط + ماً جم ط

پرانی مساوات ف (لا، ما) = ۰ بدل کر ہو جائیگی

ف (ھ + لا جم ط - ما جب ط، ک + لا جب ط + ما جم ط) = ۰

جس میں نئے محدّد استعمال کیے گئے ہیں۔

مثال۔ بتاؤ کہ مساوات ۳ لا^{۲} + ۲ لا ما + ۳ ما^{۲} - ۲ لا + ۱۰ ما + ۱۰ = ۰ کیا ہو جاتی ہے جبکہ مبداء کو نقطہ (۱، -۲) پر لے جائیں اور محوروں کو

زاویہ ۴۵° میں سے پھرا دیا جائے۔
پہلے مبداء کو (۱، -۲) پر لے جاؤ اور اس میں کے نئے محوروں کو پرانے محوروں کے متوازی رکھو، اس طرح

لا = ۱ + لاَ، ما = -۲ + ماَ

مساوات میں درج کرنے سے

۳ (۱ + لاَ)^۲ + ۲ (۱ + لاَ) (-۲ + ماَ) + ۳ (-۲ + ماَ)^۲ - ۲ (۱ + لاَ)

+ ۱۰ (-۲ + ماَ) + ۱۰ = ۰

۳ لاَ^۲ + ۲ لاَ ماَ + ۳ ماَ^۲ - ۱ = ۰

اب محوروں کو ۴۵° میں سے پھرانے سے لاَ کی بجائے (لاً - ماً)/√۲ اور ماَ کی بجائے (لاً + ماً)/√۲ رکھنے سے مساوات ہو جاتی ہے

۳ ((لاً - ماً)/√۲)^۲ + ۲ ((لاً - ماً)/√۲) ((لاً + ماً)/√۲) + ۳ ((لاً + ماً)/√۲)^۲ = ۱

جو تحویل کے بعد ہو جاتی ہے ۴ لاً^۲ + ۲ ماً^۲ = ۱
یعنی زبر حذف کرنے سے ۴ لا^۲ + ۲ ما^۲ = ۱

مشق ۶

(۱) مبداء کو (-۱، ۲) پر لے جانے سے، جبکہ محوروں کی سمتیں وہی رہیں، بتاؤ کہ مساوات لا^۲ + ما^۲ = ۳ بدل کر کیا ہو جاتی ہے۔

جواب لا^۲ + ما^۲ - ۲ لا + ۴ ما + ۲ = ۰

(۲) اگر محوروں کی سمتیں وہی رہیں تو بتاؤ کہ ذیل کی مساواتیں کیا ہو جاتی ہیں۔

(ا) ما^۲ = ۴ و لا، جبکہ مبداء کو (-و، ۰) پر لے جائیں۔

(ب) ۳ لا^2 + ۴ ما^2 = ۱ جبکہ مبداء کو (-۱، ۱) پر لے جائیں۔

(ج) ۲ لا^2 - ما^2 = ۱ 〃 〃 (-۲، ۱) پر لے جائیں۔

(د) ۲ لا - ۷ ما + ۱ = ۰ 〃 〃 (۱، -۳) پر لے جائیں۔

جواب۔ (ا) ما^2 = ۴ ا (لا - ا)

〃 (ب) ۳ لا^2 + ۴ ما^2 - ۶ لا + ۸ ما + ۵ = ۰

〃 (ج) ۲ لا^2 - ما^2 - ۸ لا - ۲ ما + ۶ = ۰

〃 (د) ۲ لا - ۷ ما + ۲۴ = ۰

(۳) محدّدوں کو ذیل کے زاویوں میں سے گھمانے کے ضابطے لکھو:

(ا) ۳۰° (ب) ۲۲۵° (ج) مس$^{-1}$ $\frac{1}{2}$

آخری صورت میں نئے محدّدوں کو پرانے محدّدوں کی رقوم میں بیان کرو۔

جواب۔ (ا) لا = $\frac{1}{2}$ (لاَ $\sqrt{3}$ - ماَ)

ما = $\frac{1}{2}$ (لاَ $\sqrt{3}$ + ماَ)

〃 (ب) لا = - $\frac{\text{لاَ - ماَ}}{\sqrt{2}}$

ما = $\frac{\text{لاَ + ماَ}}{\sqrt{2}}$

〃 (ج) لا = $\frac{\text{۲ لاَ - ماَ}}{\sqrt{5}}$

ما = $\frac{\text{لاَ + ۲ ماَ}}{\sqrt{5}}$

اور لاَ = $\frac{\text{۲ لا + ما}}{\sqrt{5}}$

ماَ = $\frac{\text{-لا + ۲ ما}}{\sqrt{5}}$

(۴) بتاؤ کہ ذیل کی مساواتیں کیا ہو جاتی ہیں جبکہ مبداء وہی رہے اور محوروں کو اُن زاویوں میں سے گھمادیا جائے جن کی سوال میں نشان دہی کی گئی ہے۔

(ا) لا^2 + ما^2 = ۱، زاویہ ۴۵° میں سے

(ب) ۷ لا^{2} + ۴ $\sqrt{۳}$ لا ما + ۳ ما^{2} = ۱، زاویہ ۳۰° میں سے

(ج) لا^{2} + ۳ لا ما + ما^{2} = ۱، زاویہ ۴۵° میں سے

جواب (ا) لا^{2} + ما^{2} = ۱

" (ب) ۹ لا^{2} + ما^{2} = ۱

" (ج) ۵ لا^{2} - ما^{2} = ۱

(۵) بتاؤ کہ ذیل کی مساوات کیا ہو جاتی ہے جبکہ مبداء کو (۲، ۳) پر لے جائیں اور محوروں کو زاویہ ۴۵° میں سے پھرا دیا جائے

لا^{2} + ۳ لا ما + ما^{2} - ۱۳ لا - ۱۲ ما + ۳۰ = ۰

جواب ۵ لا^{2} - ما^{2} = ۲

(۶) مبداء کو نقطہ (لا، ما) پر لے جانے سے مساوات

ا لا^{2} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{2} + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

کو بدلو اور (لا، ما) کی قیمتیں معلوم کرو کہ تبدیل شدہ مساوات میں لا اور ما کے سر صفر ہوں۔

نیز اس کے لیے شرط دریافت کرو کہ تبدیل شدہ مساوات میں لا، ما کے سر صفر ہوں اور مستقل رقم بھی صفر ہو۔

جواب لا = $\frac{\text{ھ ف - ب گ}}{\text{ا ب - ھ}^{2}}$، ما = $\frac{\text{گ ھ - ا ف}}{\text{ا ب - ھ}^{2}}$

ا ب ج + ۲ ف گ ھ - ا ف^{2} - ب گ^{2} - ج ھ^{2} = ۰

(۷) محوروں کو زاویہ ط میں گھمانے سے مساوات

ا لا^{2} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{2} = ۱

کو بدلو اور زاویہ ط کی قیمت دریافت کرو کہ تبدیل شدہ مساوات میں لا ما والی رقم کا سر صفر ہو۔

جواب۔ ط = $\frac{1}{2}$ مس$^{-1}$ $\frac{\text{۲ ھ}}{\text{ا - ب}}$

۲۔۱ سطح مستوی میں خطِ مستقیم کا تعیّن کئی طرح سے ہو سکتا ہے، مثلاً اگر ذیل کے اجزاء دیے گیے ہیں تو خطِ مستقیم کا محل، دو ابعاد کی فضا میں معین ہو جاتا ہے۔

(ا) خط پر کا ایک نقطہ دیا گیا ہے، نیز خط، ایک ثابت سمت کے ساتھ جو زاویہ بناتا ہے وہ معلوم ہے۔

(ب) خط پر کے کوئی دو نقطے معلوم ہیں۔

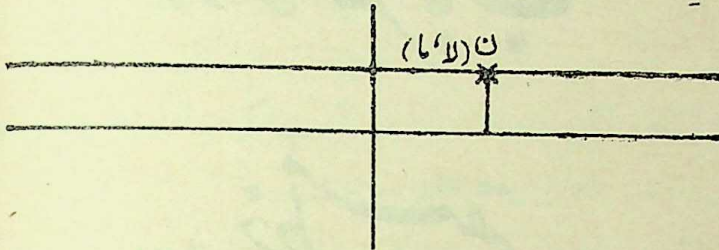
(ج) خط محوروں پر جو منقطعے بناتا ہے وہ معلوم ہیں۔

(د) مبداء سے خط پر جو عمود کھینچ سکتا ہے وہ معلوم ہے، یہ عمود ایک ثابت سمت مثلاً محور لا کے ساتھ جو زاویہ بناتا ہے وہ بھی معلوم ہے۔

(ع) خط کسی ایک محور کے متوازی ہے، یا ایک نقطہ میں سے گذرتا اور ایک دوسرے خط کے متوازی یا علی القوائم ہے وغیرہ کئی اور صورتیں ہو سکتی ہیں۔

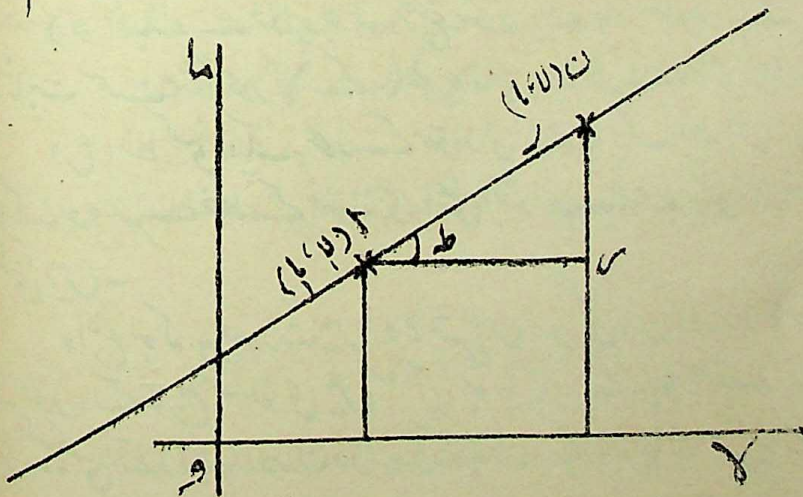
واضح ہو کہ ہر صورت میں، دو شرطیں دی گئی ہیں اور خط کا مقام اِن دو شرطوں کے تابع مستوی میں معیّن ہو جاتا ہے۔ ہمارا مقصد ہے کہ خط پر کے کسی نقطہ (لا، ما) اور ان دی ہوئی شرطوں کے درمیان جبریہ رشتہ

معلوم کریں جو خطِ مستقیم کی مساوات ہوگی۔

۲؍۱۱۔ (و) خطِ مستقیم کسی ایک محور کے متوازی ہے۔

مثلاً ایسے خط پر جو محور لا سے فاصلہ ۲ پر ہو کوئی نقطہ ن (لا، ما) لو۔ جیسا ہم نے پہلے دیکھا ہے، اس خط پر کے تمام نقطوں کی مشترک خاصیت یہ ہے کہ ما = ۲، خود محور لا کے لیے ما = ۰، اور خط محور لا کے متوازی یہ ہو سکتے ہیں:

ما = ۵؍ ۱، ما = ۷، ما = ۱، ما = –۳؍۲ اور بالعموم ما = ب

پس محور لا کے متوازی کسی خط کی مساوات ما = ب یا ما – ب = ۰ ہے۔
اسی طرح محور ما کے متوازی خطوط کی مساوات لا = ا ہے اور خود ما کی مساوات لا = ۰ ہے۔

(ب) خط ایک دیئے ہوئے نقطہ (لا، ما) میں سے گزرتا ہے اور محور لا کی مثبت سمت کے ساتھ زاویہ ط بناتا ہے۔ محور علی القوائم ہیں۔

خط ا ن ہے یہ دونوں طرف غیر محدود ہے، اس پر کا ایک نقطہ (لا۱، ما۱)
دیا ہوا ہے اور زاویہ ر ا ن = ط بھی دیا ہوا ہے جیسے مخالف سمتِ ساعت
ناپا گیا ہے۔ اس لامتناہی خط پر کوئی نقطہ، کہیں پر ن (لا، ما) لو۔ مقصود یہ ہے
کہ (لا، ما) اور دی ہوئی چیزوں، لا۱، ما۱، ط میں جبریہ رشتہ معلوم کیا جائے جو
اس خط پر کے کسی نقطہ (لا، ما) کے لیے پورا ہوگا اور کسی ایسے نقطہ کے لیے پورا نہیں
ہوگا جو اس خط پر واقع نہ ہو۔

ہندسی ربط جو خط پر کے نقطوں سے پورا ہوتا ہے (یعنی تمام اس خط پر
کے نقطے ایک سیدھ میں واقع ہوتے ہیں (یعنی ایک طرح کا سیدھا پن ان میں
پایا جاتا ہے) اُسے اس طرح بیان کرتے ہیں:

$$\frac{\text{ر ن}}{\text{ا ر}} = \text{مس ط}$$

جس کی جبریہ شکل یہ ہے　ما − ما۱ = مس ط (لا − لا۱) ....　(۱)

اس کو اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں　$\frac{\text{لا − لا۱}}{\text{جم ط}} = \frac{\text{ما − ما۱}}{\text{جب ط}}$

یا　$\frac{\text{لا − لا۱}}{\text{جم ط}} = \frac{\text{ما − ما۱}}{\text{جم (۹۰° − ط)}}$

واضح ہو کہ محور لا کے ساتھ خط کا زاویہ ط ہے اور محور ما کے ساتھ (۹۰° − ط)
اس خط پر کا کوئی نقطہ (لا، ما) یا تمام نقطے اس رشتہ (۱) کو پورا کرتے ہیں،
پس یہ خطِ مستقیم ا ن کی مساوات ہے۔

مثال۔ خط (−۱، ۲) میں سے گزرتا اور محور لا کے ساتھ ۶۰° کا زاویہ بناتا ہے۔

مساوات ہے　ما − ۲ = مس ۶۰° (لا + ۱) یا ما − ۲ = √۳ (لا + ۱)
یعنی　√۳ لا − ما + ۲ + √۳ = ۰ خط کی مساوات ہے
مساوات　ما − ما۱ = مس ط (لا − لا۱) کو بالعموم اس طرح لکھتے ہیں

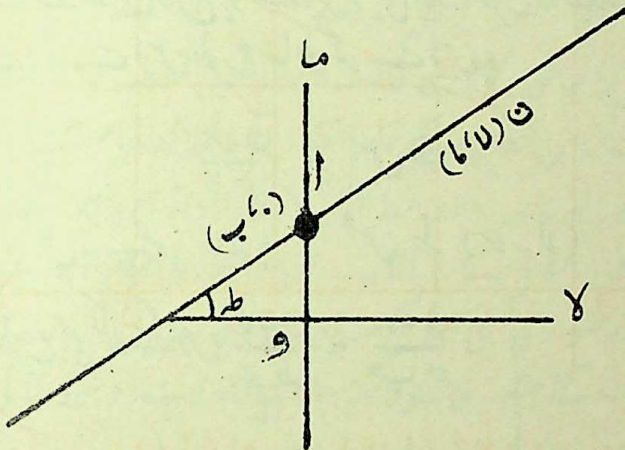
ما ۔ ما = م (لا ۔ لا) .... (۲)

جہاں م = مس طہ، یعنی طہ = مس ام

(ج) اگر خط محور ما کو مبداء سے فاصلہ ب پر کاٹے یعنی نقطہ (لا، ما)
اس صورت میں (۰، ب) ہو تو خط کی مساوات ہوگی

ما ۔ ب = مس طہ (لا ۔ ۰)

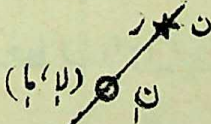
یعنی ما = مس طہ لا + ب

یا ما = م لا + ب .... (۳)

جہاں طہ = مس ۔ ام ۔ خطِ مستقیم کی اس صورت کو مماسی صورت کہتے ہیں ۔ اگر خط مبداء میں سے گذرے اور محور لا سے زاویہ طہ بنائے تو مساوات ہوگی ۔

ما = مس طہ لا

ما = م لا .... (۴)

نوٹ :۔ ایک خط ن (لا، ما) میں سے گذرتا اور محور لا سے زاویہ طہ بناتا ہے
اس خط پر کے کسی نقطہ کے محدّد جو ن، ر
سے فاصلہ ر پر ہونگے

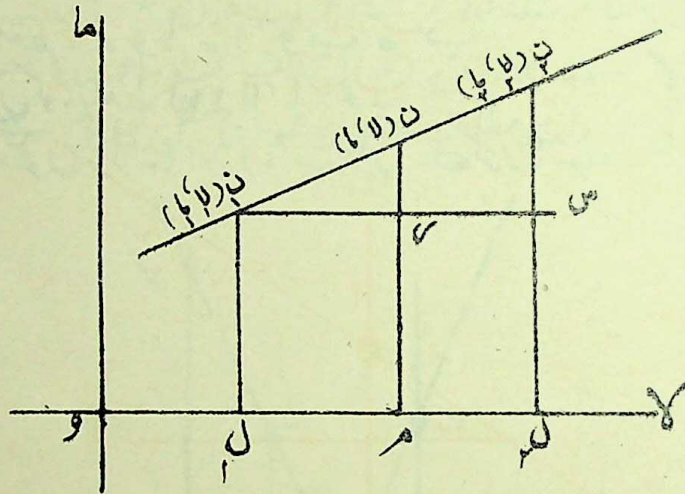
ن ر
(لا، ما) ن

(لا + ر جم طہ، ما + ر جیب طہ)

ر کو مختلف مثبت یا منفی قیمتیں دینے سے اس خط پر کے کسی نقطہ کے محدّد لکھے جا سکتے ہیں

مثال ۔ خطِ مستقیم ۲ لا ۔ ۲ ما + ۷ = ۰ کو مماسی شکل میں رکھا جا سکتا ہے ۔

۲ ما = ۲ لا + ۷ یعنی ما = لا + $\frac{۷}{۲}$

مس طہ = ۱، ب = $\frac{۷}{۲}$ یعنی خط محور لا کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بناتا ہے اور نقطہ (۰، $\frac{۷}{۲}$) میں سے گذرتا ہے۔

(و) خط دو دیے ہوئے نقطوں ن۱ (لا۱، ما۱) اور ن۲ (لا۲، ما۲) میں سے گذرتا ہے۔

فرض کرو کہ ن۱ (لا۱، ما۱) اور ن۲ (لا۲، ما۲) خط پر دیے ہوئے نقاط ہیں اور کوئی اور نقطہ خط پر ن (لا، ما) ہے۔ نقاط ن۱، ن، ن۲ میں سے معیّن ن۱ ل۱، ن م، ن۲ ل۲ کھینچو اور محور و لا کے متوازی ن۱ ر س کھینچو جو ن م اور ن۲ ل۲ سے ر اور س پر ملے۔

متشابہ مثلثوں سے $\frac{\text{ن۱ ر}}{\text{ن۱ س}} = \frac{\text{ر ن}}{\text{س ن۲}}$

اس کی جبریہ شکل ہوگی $\frac{\text{لا} - \text{لا۱}}{\text{لا۲} - \text{لا۱}} = \frac{\text{ما} - \text{ما۱}}{\text{ما۲} - \text{ما۱}}$ .... (۵)

یا $\frac{\text{لا} - \text{لا۱}}{\text{لا۱} - \text{لا۲}} = \frac{\text{ما} - \text{ما۱}}{\text{ما۱} - \text{ما۲}}$ .... (۵َ)

مثال۔ خط کی مساوات جو نقاط (-۲، ۳) اور (۱، -۴) میں سے

گزرتا ہے یہ ہوگی: (لا + ۲) / (۱ − ۳۰) = (ما − ۳) / (۳ − (−۴))

یعنی ۷ (لا + ۲) + ۳ (ما − ۳) = ۰، یعنی ۷ لا + ۳ ما + ۵ = ۰

(۵) محوروں پر خط کے مقطوعے (ا، ب) معلوم ہیں، خط کی مساوات مطلوب ہے۔

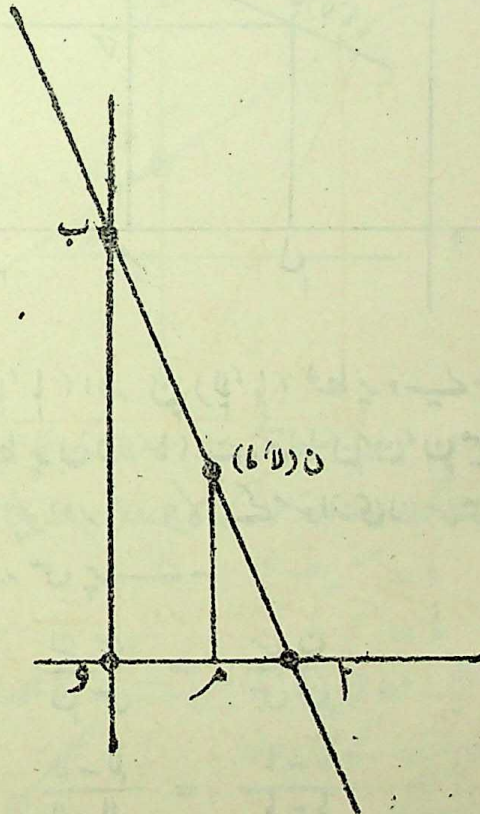
خط کے مقطوعے و ا = ا، و ب = ب،

خط پر کہیں کوئی نقطہ ن (لا، ما) لو۔

خط دونقطوں (ا، ۰) اور (۰، ب) میں سے گزرتا ہے۔

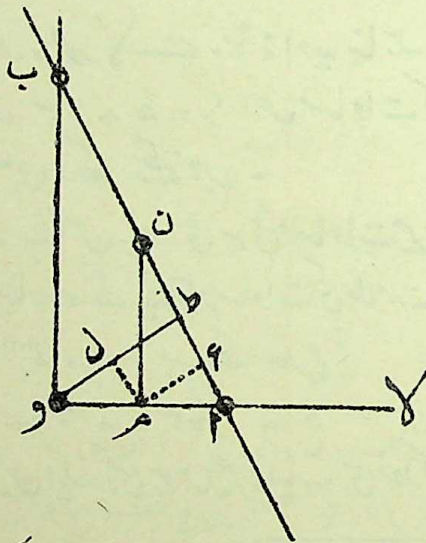
اس لیے (لا − ا) / (۰ − ا) = (ما − ۰) / (ب − ۰)

یعنی ب (لا − ا) + ا ما = ۰

ب لا + ا ما = ا ب

ا ب پر تقسیم کرنے سے لا/ا + ما/ب = ۱ ...... (۶)

مثال ۔ خط جو محوروں پر مقطوعے ا، ۳ بناتا ہے اس کی مساوات ہوگی

لا/۱ + ما/۳ = ۱ یعنی ۳ لا ـ ما + ۳ = ۰

(س) مبدا سے خط پر کے عمود ما کا طول ع دیا گیا ہے، نیز عمود محور لا سے جو زاویہ (ہ) (مخالف سمت ساعت) بناتا ہے معلوم ہے، خط کی مساوات مطلوب ہے ۔ یہ عمودی شکل کہلاتی ہے ۔

خط ا ب ہے جو محوروں سے ا اور ب پر ملتا ہے لیکن دونوں جانب غیر محدود ہے ۔ خط پر عمود و ط = ع اور ا و̂ ط = ہ

خط پر کوئی نقطہ ن (لا، ما) کہیں واقع ہے ۔ اب لا، ما، ع، ط میں رشتہ مطلوب ہے ۔ معین ن م کھینچو، پھر م سے و ط پر عمود م ل پر ا ب پر عمود م ۶ کھینچو ۔

اب و ط = و ل + م ۶ = و م جم ا و ط + م ن جب م ن ۶
= لا جم ہ + ما جب ہ، کیونکہ

∠ م ن ع = ∠ و ب ا = ∠ ا و ط = عہ

پس خط کی مساوات ہے لاجم عہ + ماجب عہ = ع ...... (۷)

واضح ہو کہ اس مساوات میں عمود کو ہمیشہ مثبت لیا جائیگا

عمودی شکل کی مساوات لاجم عہ + ماجب عہ = ع میں یہ یاد رہے کہ ع (مبداء سے خطِ مستقیم پر ڈالے ہوئے عمود کا مطلق طول ہے) اور اسی شکل میں لا اور ما کے سر بالترتیب جم عہ اور جب عہ ہیں، جن کے مربعوں کا مجموعہ ایک کے مساوی ہے (جم² عہ + جب² عہ = ۱)۔

مثال۔ (۱) $\frac{لا}{۲}$ + $\frac{\sqrt{۳}\,ما}{۲}$ = ۳، ایسا خط ہے جس پر مبداء سے عمود ۳ ہے اور یہ عمود محور لا سے °۳۰ زاویہ بناتا ہے۔

(۲) ۲ لا + ۳ ما + ۵ = ۰، اس مساوات کو عمودی شکل لاجم عہ + ماجب عہ = ع میں رکھ سکتے ہیں۔

چونکہ ع مثبت ہے اس لیے دی ہوئی مساوات میں بھی بائیں جانب کی مستقل رقم کو مثبت بنانے کے لیے تمام مساوات کی علامت بدل دینی چاہیے۔ پس

لاجم عہ + ماجب عہ = ع

–۲ لا – ۳ ما = ۵

اگر یہ دونوں مساواتیں ایک ہی ہوں یعنی ایک ہی خط کو تعبیر کریں تو

$$\frac{جم\,عہ}{-۲} = \frac{جب\,عہ}{-۳} = \frac{ع}{۵} = \frac{\sqrt{جم^۲ عہ + جب^۲ عہ}}{\sqrt{(-۲)^۲ + (-۳)^۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۱۳}}$$

یعنی جم عہ = $\frac{-۲}{\sqrt{۱۳}}$ اور جب عہ = $\frac{-۳}{\sqrt{۱۳}}$ اور ع = $\frac{۵}{\sqrt{۱۳}}$

پس دی ہوئی مساوات عمودی شکل میں آجائیگی اگر تمام مساوات کو لا، ما کے سروں کے مربعوں کے مجموعہ کے جذر $\sqrt{(-۲)^۲ + (-۳)^۲}$ پر تقسیم کر دیا جائے یعنی مساوات کی عمودی شکل ہے $\frac{-۲}{\sqrt{۱۳}}$ لا – $\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}$ ما = $\frac{۵}{\sqrt{۱۳}}$

مبداء سے خط پر عمود $\frac{۵}{۱۳\sqrt{}}$ ہے اور یہ عمود محور لا سے زاویہ جم$^{-۱}$($-\frac{۲}{۱۳\sqrt{}}$)

بناتا ہے، اور جدولوں سے یہ زاویہ ہے

$$۱۸۰^\circ - \text{جم}^{-۱} \frac{۲}{\sqrt{۱۳}} = ۱۸۰^\circ - \text{جم}^{-۱} (۵۵،) = ۱۸۰^\circ - ۵۶^\circ \text{ تقریباً}$$
$$= ۱۲۴^\circ$$

۲ء۱۲ ۔ خطِ مستقیم کی مساوات کی عام شکل، کارٹیزی محدّدوں میں
اُوپر ہم نے خطِ مستقیم کی مساوات کی مختلف شکلیں حاصل کی ہیں:

(۱) $\quad$ ما ـ ما$_۱$ = م (لا ـ لا$_۱$)

(۲) $\quad$ ما = م لا + ب

(۳) $\quad \frac{\text{لا} - \text{لا}_۱}{\text{لا}_۱ - \text{لا}_۲} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_۱}{\text{ما}_۱ - \text{ما}_۲}$

(۴) $\quad \frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = ۱$

(۵) $\quad$ لا جم ھ + ما جب ھ = ع، وغیرہ

ہم دیکھتے ہیں کہ خطِ مستقیم کی یہ سب مساواتیں، دو مجہول مقداروں لا، ما میں درجۂ اول کی مساواتیں ہیں، درجۂ اول کی عام سے عام مساوات لا، ما میں یہ ہے

ا لا + ب ما + ج = ۰

ہم ثابت کرینگے کہ یہ ایک خطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔ بظاہر اس میں تین مستقل ہیں، کسی ایک مستقل مثلاً ج پر تقسیم کرنے سے صرف دو مستقل رہ جاتے ہیں $\frac{\text{ا}}{\text{ج}}$ لا + $\frac{\text{ب}}{\text{ج}}$ ما + ۱ = ۰ ۔ یا جیسے اس شکل

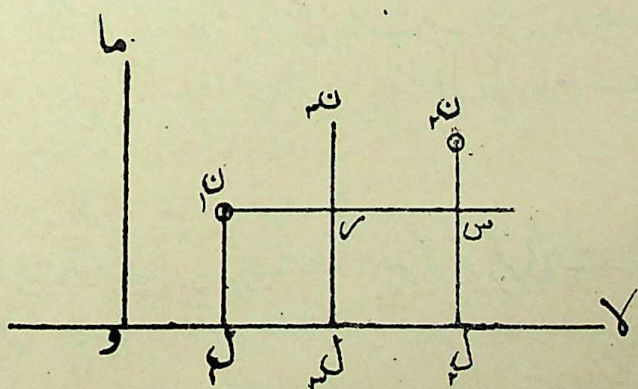
ل لا + م ما + ۱ = ۰ .... (۸)

میں لکھا جا سکتا ہے ۔ خطِ مستقیم کی عام سے عام مساواتیں فی الحقیقت دو غیر تابع مستقل ہیں، ان دو کے معلوم ہونے سے خط کا مقام سطح مستوی میں متعین ہو جاتا ہے ۔ اوپر ہم نے دیکھا ہے کہ خطِ مستقیم پر دو شرائط عائد کیے جائیں تو ہندسی طور پر اس کا مقام متعین ہو جاتا ہے، مثلاً خط دو نقطوں میں سے گزارا جا سکتا ہے، مبداء سے خط پر کے عمود کا طول دیا گیا ہے ۔ نیز عمود کا میلان محور لا کے ساتھ معلوم ہے، وغیرہ یہ سب دو ہندسی شرائط کے مساوی ہیں ۔ ہر شرط کے مماثل ایک جبریہ رشتہ یا مساوات حاصل ہوتی ہے، دو شرطوں سے دو مساواتیں حاصل ہونگی جو خطِ مستقیم میں کے مستقل معلوم کرنے کے لیے کافی ہونگی ۔

اب ثابت کیا جائیگا کہ لا، ما میں درجۂ اول کی عام سے عام مساوات

$$\text{ا لا + ب ما + ج = ۰} \qquad (۱)$$

خطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے ۔

فرض کرو کہ (۱) جس ہندسی لوکس یا طریق کو بھی تعبیر کرے اس پر دو نقطے ن۱ (لا۱، ما۱) اور ن۲ (لا۲، ما۲) منتخب کر لیے گئے ہیں ۔ نیز کوئی اور تیسرا نقطہ ن۳ (لا۳، ما۳) بھی اسی لوکس پر واقع ہے ۔

ن۱ل۱، ن۲ل۲، ن۳ل۳ عمود کھینچو اور ن۱ سے محور لا کے متوازی خط کھینچو

جو $\text{ن}_3\text{ل}_3$، $\text{ن}_2\text{ل}_2$ سے س، ر پر ملے، نقاط ن_1، ن_2، ن_3 کے محدّد مساوات کو پورا کرتے ہیں۔ اس لیے

$$\text{ا}\,\text{لا}_1 + \text{ب}\,\text{ما}_1 + \text{ج} = ۰$$

$$\text{ا}\,\text{لا}_2 + \text{ب}\,\text{ما}_2 + \text{ج} = ۰$$

$$\text{ا}\,\text{لا}_3 + \text{ب}\,\text{ما}_3 + \text{ج} = ۰$$

تفریق کرنے سے

$$\text{ا}\,(\text{لا}_2 - \text{لا}_1) + \text{ب}\,(\text{ما}_2 - \text{ما}_1) = ۰$$

$$\text{ا}\,(\text{لا}_3 - \text{لا}_1) + \text{ب}\,(\text{ما}_3 - \text{ما}_1) = ۰$$

اس لیے

$$\frac{\text{لا}_3 - \text{لا}_1}{\text{لا}_2 - \text{لا}_1} = \frac{\text{ما}_3 - \text{ما}_1}{\text{ما}_2 - \text{ما}_1}$$

یعنی

$$\frac{\text{ن}_1\text{ر}}{\text{ن}_1\text{س}} = \frac{\text{ن}_3\text{ر}}{\text{ن}_2\text{س}}$$

اور یہ اُسی وقت ممکن ہے جب کہ ن_3، نقاط ن_1، ن_2 کو ملانے والے خط پر واقع ہو۔ پس ن_3 یا کوئی اَور نقطہ جس کے محدّد $\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج} = ۰$ کو پورا کرتے ہیں (اور ایسے نقطے بے شمار ہیں) ایک خطِ مستقیم پر واقع ہوتا ہے۔ پس لا، ما میں درجۂ اول کی عام مساوات $\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج} = ۰$ ایک خطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

۳۱ء۲۔۔ (ا) خطِ مستقیم کی عام مساوات $\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج} = ۰$ ہے، ما کے سر ب پر تقسیم کرنے اور باقی رقموں کو دوسری طرف لے جانے سے مساوات ہو جاتی ہے

$$\text{ما} = -\frac{\text{ا}}{\text{ب}}\,\text{لا} - \frac{\text{ج}}{\text{ب}} \qquad (\text{ا})$$

ظاہر ہے کہ مساوات کو اگر کسی مستقل سے ضرب دے دیا جائے یا اسے کسی مستقل پر تقسیم کر دیا جائے تو مساوات نہیں بدلتی، یعنی لا، ما میں اس کی اصلیں وہی رہتی ہیں اور چونکہ لا، ما کی قیمتیں مرتسم کرنے سے مساوات کا طریق پیدا ہوتا ہے، اس لیے معلوم ہوا کہ مستقل سے ضرب یا تقسیم کرنے سے مساوات جس ہندسی طریق کو تعبیر کرتی ہے وہ وہی رہتا ہے۔ یعنی ہندسی طریق میں فرق نہیں آتا۔

مساوات (ا) کی مماسی شکل ما = م لا + ب کے ساتھ مقابلہ کرنے سے ظاہر ہے کہ اگر محور علی القوائم ہوں تو $م = -\frac{ا}{ب}$ یعنی مساوات ا لا + ب ما + ج = ۰ کا ہندسی طریق محور لا کی مثبت سمت کے ساتھ ایسا زاویہ بناتا ہے جس کا مماس $-\frac{ا}{ب}$ ہے۔ نیز یہ لوکس محور ما کو مبداء سے $-\frac{ج}{ب}$ فاصلہ پر کاٹتا ہے۔

(ب) نیز ا لا + ب ما + ج = ۰ کو شکل

$$\frac{لا}{-\frac{ج}{ا}} + \frac{ما}{-\frac{ج}{ب}} = ۱$$

میں لکھنے سے ظاہر ہے کہ خط کے مقطوعے محوروں لا اور ما پر بالترتیب $-\frac{ج}{ا}$ ، $-\frac{ج}{ب}$ ہیں۔

(ج) نیز جس نقطہ پر خط ا لا + ب ما + ج = ۰ محور لا کو کاٹتا ہے، اس نقطہ کے محدّدوں کے لیے، خط کی اور محور لا دونوں کی مساواتیں ایک ساتھ پوری ہوتی ہیں، یعنی

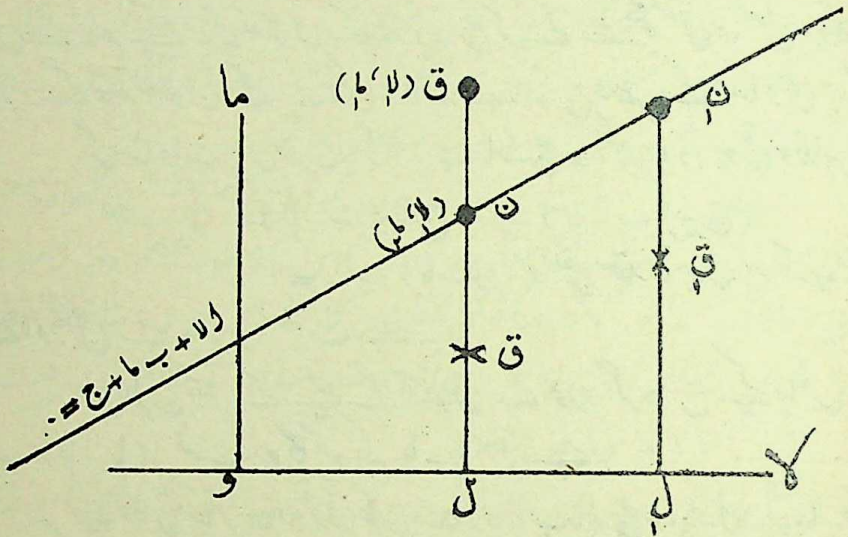
ا لا + ب ما + ج = ۰

ما = ۰

کو بطور دو ہمزاد مساواتوں کے حل کرنا چاہیے، پس نقطۂ تقاطع کے محدّد $(-\frac{ج}{ا}، ۰)$ ہیں، اسی طرح جہاں خط محور ما کو کاٹتا ہے وہاں پر خط اور محور ما کی مساوات لا = ۰، دونوں پوری ہونا چاہئیں، یعنی

ا لا + ب ما + ج = ۰

لا = ۰

ان کو ایک ساتھ حل کرنے سے خط کا نقطۂ تقاطع محور ما کے ساتھ حاصل ہوتا ہے (۰، ـ ج/ب)۔

(د) فرض کرو کہ خط ن ن، الا + ب ما + ج = ۰ سے تعبیر ہوتا ہے اور محوروں کے مستوی میں کوئی نقطۂ ق (لا، ما) ہے جو خط کے کسی ایک جانب واقع ہوتا ہے۔ ق میں سے معیّن کھینچو جو خط سے ن (لا، ما) پر اور محور لا سے ل پر ملے۔ واضح ہو کہ ن کا فصلہ (لا) وہی ہے جو ق کا، لیکن معیّن مختلف ہے۔

اب اگر نقطۂ ق کے محدّدوں (لا، ما) کو خط کی مساوات کے دائیں رکن میں مندرج کریں تو حاصل ہوتا ہے الا + ب ما + ج

= الا + ب ما + ج ـ (الا + ب ما + ج)

[کیونکہ (لا، ما) خط پر واقع ہونے کے باعث الا + ب ما + ج = ۰]

= ب (ما ـ ما)

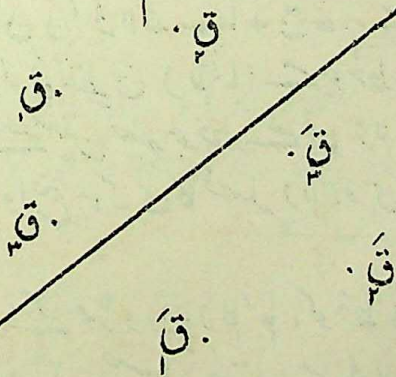
اگر ب مثبت ہو تو یہ جملہ مثبت ہوگا اگر ہا > ہا۲ یعنی نقطہ ق، ل کے اوپر ہو اور یہ نتیجہ درست ہے اُوپر کی جانب کے تمام نقطوں کے لیے۔ یعنی اگر اوپر کی جانب کے کسی نقطہ کے محدّد مساوات کے دائیں رُکن ا لا + ب ما + ج میں درج کر دیے جائیں تو تمام صورتوں میں نتیجہ مثبت حاصل ہوگا اور بخلاف اس کے تمام نیچے کے نقطوں کے محدّد درج کرنے سے نتیجہ منفی حاصل ہوگا اور خط پر کے تمام نقطوں کے لیے رکن ا لا + ب ما + ج صفر کے مساوی ہوگا۔

اگر مساوات اس طرح۔ ا لا - ب ما - ج = لکھی ہوئی ہوتی تو ظاہر ہے کہ

- ا لا۱ - ب ہا۱ - ج - (- ا لا۱ - ب ہا۲ - ج)

= - ب (ہا۱ - ہا۲) جو منفی مقدار ہوگی کیونکہ ب مثبت ہے اور شکل سے ہا۱ - ہا۲ مثبت ہے۔

اسی طرح خط کے نیچے کے نقطوں کے محدّد اگر درج کیے جائیں تو، - ب (ہا۱ - ہا۲)، مثبت ہوگا کیونکہ ہا۱ - ہا۲ منفی ہے۔

اب خط کی مساوات دونوں طرح سے ا لا + ب ما + ج = ۰ یا - ا لا - ب ما - ج = ۰ لکھی جا سکتی ہے، اور ا، ب، ج میں سے کوئی مثبت منفی ہو سکتے ہیں، پس اُوپر کے عمل سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں۔ خطِ مستقیم، محوروں کے مستوی کو دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے

اگر ایک جانب کے تمام نقطوں ق۱، ق۲، ق۳ ... کے محدّد اس کے دائیں رکن ا لا + ب ما + ج میں درج کیے جائیں تو ہر ایسے اندراج سے ایک عدد ملیگا، اب ایک طرف کے نقطوں کے متعلق اندراج سے جو تمام بے شمار عدد ملینگے

ان کی ایک ہی علامت ہوگی خواہ مثبت ہو یا منفی اور یہ علامت دوسری جانب کے نقطوں ق، قَ، .... کے محدّدوں کے اندراج سے جو عدد ملینگے ان کی علامت سے مختلف ہوگی یعنی اگر ایک طرف کے اندراج سے مثبت عدد ملتے ہیں تو دوسری طرف کے اندراج سے منفی عدد ملینگے۔ بعض اوقات جس جانب کے اندراج سے مثبت عدد ملیں اُسے مثبت جانب کہتے ہیں اور دوسری جانب کو منفی۔ ظاہر ہے کہ خط پر کے تمام نقاط مساوات کو پورا کرینگے اور ایسے ہر نقطہ کے محدّد ا لا + ب ما + ج میں درج کرنے سے یہ رکن صفر کے مساوی ہوگا۔

مثال (۱) خط ۲ لا + ۳ ما + ۵ = ۰ کو (ا) مماسی شکل میں لکھو اور اس کا زاویۂ میلان محور لا کے ساتھ معلوم کرو (ب) اس کے مقطوعے محوروں پر معلوم کرو۔ (ج) بتاؤ کہ یہ خط محور لا اور ما کو کن نقطوں پر کاٹتا ہے۔ (د) بتاؤ کہ نقطہ (۱،۲) اس کے کس جانب واقع ہے، کیا یہ نقطہ مبداء والی جانب واقع ہے؟

(ا) ۲ لا + ۳ ما + ۵ = ۰

مماسی شکل ما = $-\frac{۲}{۳}$ لا $-\frac{۵}{۳}$، اگر محور لا کی مثبت سمت کے ساتھ زاویہ طہ بنائے

تو مس طہ = $-\frac{۲}{۳}$، طہ = مس$^{-۱}$ $(-\frac{۲}{۳})$ = مس$^{-۱}$ (- ...۶۶۶ء)

جدولوں سے وہ زاویہ جس کا مماس ۷ء ہے ۳۵° ہے، اس لیے طہ = ۱۸۰ - ۳۵ = ۱۴۵°

نیز یہ خط محور ما کو مبداء سے نیچے فاصلہ $\frac{۵}{۳}$ پر ملتا ہے۔

(ب) خط اس شکل میں لکھا جا سکتا ہے $\frac{لا}{-\frac{۵}{۲}} + \frac{ما}{-\frac{۵}{۳}} = ۱$،

محوروں پر مقطوعے $-\frac{۵}{۲}$، $-\frac{۵}{۳}$ ہیں۔

(ج) جہاں خط محور لا سے ملتا ہے وہاں ۲ لا + ۳ ما + ۵ = ۰، ما = ۰ دونوں مساواتیں ایک ساتھ پوری ہونگی

یعنی (لا = $-\frac{۵}{۲}$، ما = ۰) نقطہ ($-\frac{۵}{۲}$، ۰) حاصل ہوا۔

جہاں خط محور ما سے ملتا ہے وہ نقطہ ۲ لا + ۳ ما + ۵ = ۰ کو اکٹھا حل کرنے سے حاصل ہوگا
لا = ۰
نقطہ ہے (۰، − $\frac{۵}{۳}$)

(د) نقطہ (۲، ۱) کے محدّد ۲ لا + ۳ ما + ۵ میں درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے
۲ (۱) + ۳ (۲) + ۵ = + ۱۳ یعنی نقطہ مثبت جانب واقع ہے، مبداء کے محدّد (۰، ۰)
درج کرنے سے + ۵ حاصل ہوتا ہے، پس نقطہ مبداء والی جانب واقع ہے۔

مثال (۲) ثابت کرو کہ نقطے (۱، −۱) اور (۲، ۴) خط ۲ لا − ۳ ما + ۴ = ۰
کی مختلف جانبوں میں واقع ہیں، خط کو مرتسم کرو اور نقطوں کا مقام شکل میں دکھاؤ۔

مثال (۳) خط ۴ لا + ۵ ما − ۱۰ = ۰ کے مقطوعے محوروں پر دریافت
کرو، خط کو مرتسم کرو اور دکھاؤ کہ نقطے (−۳، + ۵) (۲، ۷) خط کے ایک طرف
واقع ہیں (مثبت جانب) اور نقطے (+ ۱، −۲) اور (۲، −۳) خط کے دوسری
طرف واقع ہیں (منفی جانب) اور نقطے (۱، ۵ء۳)، (۲، ۵)، (۴، ۸) خط پر واقع
ہیں۔ تمام نقطوں کا مقام خط کے لحاظ سے مرتسم کرو۔

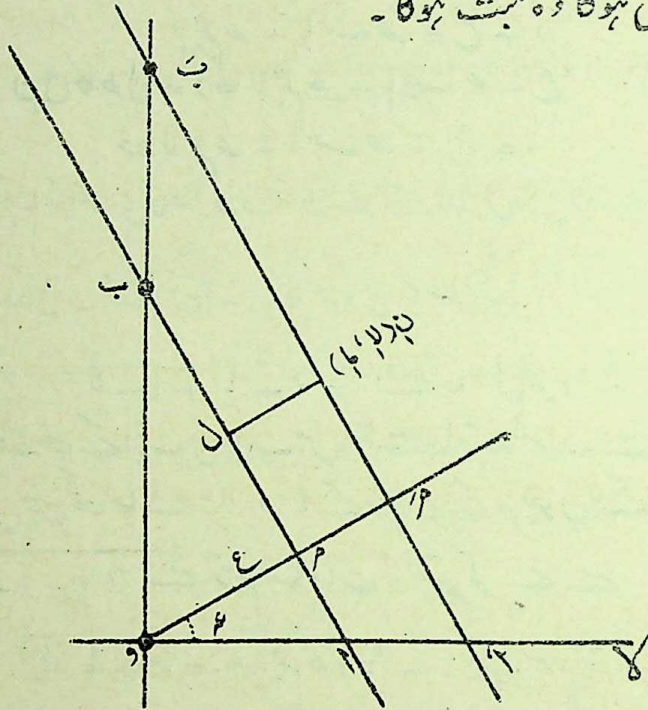
مثال (۴) ثابت کرو کہ چار نقاط (۵، ۲)، (−۲، ۶)، (−۵، ۲)، (−۲، −۴)
ایک ایک کر کے اُن چار حصّوں میں واقع ہیں جو دو خطوطِ مستقیم ۳ لا + ما + ۱ = ۰
اور ۳ لا − ۲ ما + ۴ = ۰ کے درمیان بنتے ہیں۔ خطوں کو مرتسم کر کے نقطوں کا
محل شکل میں دکھاؤ۔

۲ء۱۴ ۔ کسی نقطہ ن۱ (لا۱، ما۱) کا عمودی فاصلہ خطِ مستقیم

لا جم عہ + ما جب عہ = ع سے یا بالعموم خط ا لا + ب ما + ج = ۰ سے
دریافت کرو ۔ محور علی القوائم ہیں۔

فرض کرو کہ خط ا ب کی مساوات لا جم عہ + ما جب عہ = ع ہے
اور دیا ہوا نقطہ ن۱ (لا۱، ما۱) ہے۔

ن۱ سے ا ب پر عمود ن۱ ل کھینچا گیا ہے جس کا طول دی ہوئی مقداروں
لا۱، ما۱ اور خط کے دیے ہوئے مستقلوں عہ اور ع کی رقوم میں حاصل کرنا
مقصود ہے۔ واضح ہو کہ مبداء خط کی منفی جانب میں واقع ہے اور نقطہ ن۱،

مقابل کی یعنی مثبت جانب میں واقع ہے جو خط کو شکل لاجم عہ + ماجب عہ ۔ ع = ۰ میں لکھنے پر اور مبداء کے محدّد درج کرنے سے ظاہر ہے پس نٖ سے جو عمود کا طول حاصل ہوگا وہ مثبت ہوگا۔

نٖ میں سے خط اَبَ کھینچو جو اب کے متوازی ہو اور محدّدوں سے اَ بَ پر ملے ۔ مبداء و سے خطوں اب اور اَبَ پر عمود و م و مَ کھینچو جو اب سے م پر اور اَبَ سے مَ پر ملتا ہے ۔ نیز فرض کرو کہ نٖ سے خط اب پر کے عمود کا طول نٖ ل = د، یہ طول مطلوب ہے۔

اب دیے ہوئے خط پر مبداء سے عمود ع ہے اور عمود کا زاویہ محور لا سے عہ ہے، اس کی دی ہوئی مساوات لاجم عہ + ماجب عہ = ع ہے، اب خط اَبَ، خط اب کے متوازی ہے، مبداء سے اس پر عمود و مَ = ع + د اور محور لا سے اس عمود کا زاویہ وہی عہ ہے، اس لیے خط اَبَ کی مساوات ہوگی۔

لاجم عہ + ماجب عہ = ع + د

اب یہ خط اَ بَ، نقطہ ن (لا۱، ما۱) میں سے گذرتا ہے، اس لیے یہ مساوات (لا۱، ما۱) سے پُوری ہوتی ہے

لا۱ جم عہ + ما۱ جب عہ = ع + د (۱)

یعنی عمود ن ل کا طول = د = لا۱ جم عہ + ما۱ جب عہ ـ ع،

خط لا جم عہ + ما جب عہ ـ ع = ۰

سے نقطہ (لا۱، ما۱) کا عمودی فاصلہ صرف نقطہ کے محدّد خط میں درج کر دینے سے حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۔ نقطہ (۲، ـ۱) کا عمودی فاصلہ خط

لا ـ √۳ ما + ۲ = ۰ سے حاصل کرو ۔

مبداء اور نقطہ خط کے ایک ہی جانب ہیں (مثبت جانب)، سب سے پہلے، خط کو عمودی شکل میں لکھا جائے ۔ لا اور ما کے ضربوں کے مربعوں کے مجموعہ کے جذر

√(۱۲ + (ـ√۳)۲) سے تمام مساوات کو تقسیم کرنے سے

لا/۲ ـ (√۳/۲) ما + ۳ = ۰، لا جم ۱۵°۳ + ما جب ۱۵°۳ + ۳ = ۰

پس عمود کا طول محض نقطہ کے محدّد (۲، ـ۱) خط کی مساوات میں درج کرنے سے ملتا ہے

۲ (۱/۲) ـ (√۳/۲) . (ـ۱) + ۳ = ۴ + √۳/۲

اگر (لا۱، ما۱) کا عمودی فاصلہ ا لا + ب ما + ج = ۰ سے مطلوب ہو تو پہلے مساوات کو عمودی شکل لا جم عہ + ما جب عہ ـ ع = ۰ میں لکھا جائے، پھر صرف محدّد لا۱، ما۱ مساوات کے دائیں رکن میں درج کرنے سے عمود کا طول ملیگا ۔

ا لا + ب ما + ج = ۰ کی عمودی شکل حاصل کرنے کے لیے، کوئی زاویہ عہ ایسا ملنا چاہیے کہ

جم عہ / ا = جب عہ / ب = ۱ / √(ا۲ + ب۲) یعنی جم عہ = ۱ / √(ا۲ + ب۲) اور

جب عہ = ب / √(ا۲ + ب۲)، پس مطلوبہ شکل حاصل ہوگی اگر مساوات کو √(ا۲ + ب۲) پر

تقسیم کردیا جائے۔ اس طرح حاصل ہوتا ہے $\frac{\text{ا}}{\sqrt{\text{ا}^{2}+\text{ب}^{2}}}\text{لا}+\frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{ا}^{2}+\text{ب}^{2}}}\text{ما}+\frac{\text{ج}}{\sqrt{\text{ا}^{2}+\text{ب}^{2}}}=0$

یعنی $\text{لا جم ع}+\text{ما جب ع}+\frac{\text{ج}}{\sqrt{\text{ا}^{2}+\text{ب}^{2}}}=0$ جہاں $-\text{ع}=\frac{\text{ج}}{\sqrt{\text{ا}^{2}+\text{ب}^{2}}}$

یعنی مبداء سے خط $\text{ا لا}+\text{ب ما}+\text{ج}=0$ پر عمود کا طول $\text{ع}=\frac{-\text{ج}}{\sqrt{\text{ا}^{2}+\text{ب}^{2}}}$ ہے
جو مثبت ہوگا اگر ج منفی ہے، اور منفی ہوگا اگر ج مثبت ہے۔

پس خط $\text{ا لا}+\text{ب ما}+\text{ج}=0$ کی عمودی صورت $\frac{\text{ا لا}+\text{ب ما}+\text{ج}}{+\sqrt{\text{ا}^{2}+\text{ب}^{2}}}=0$
ہے اور (لا۱، ما۱) کا عمودی فاصلہ خط $\text{ا لا}+\text{ب ما}+\text{ج}=0$ سے محض محدّد درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ا لا}_{1}+\text{ب ما}_{1}+\text{ج}}{\sqrt{\text{ا}^{2}+\text{ب}^{2}}}$$

عمود کی علامت اور سمت۔ عددی مثال کے ذریعہ

توضیح زیادہ مناسب ہوگی۔ نقطہ (۱، -۲) کا عمودی فاصلہ جو خط $۲\,\text{لا}-۳\,\text{ما}-۷=0$ کی عمودی صورت میں محدّد درج کرنے سے حاصل ہوگا اس کی علامت معلوم کرنے کے لیے ہم دیکھتے ہیں کہ نقطہ (۱، -۲) خط کے مثبت جانب واقع ہے۔ اس لیے محدّد درج کرنے سے عمود کی مثبت علامت حاصل ہوگی یعنی عمود $=\frac{۲\times۱-۳(-۲)-۷}{+\sqrt{۲^{2}+(-۳)^{2}}}=\frac{۱}{\sqrt{۱۳}}$ مبداء منفی جانب واقع ہے، اس لیے نقطہ اور مبداء سے عمود خط کی متقابل جانبوں میں واقع ہونگے۔

خط کی مساوات کو -۱ سے ضرب دے کر اس شکل میں بھی لکھا جاسکتا ہے
$-۲\,\text{لا}+۳\,\text{ما}+۷=0$، خط وہی رہا، نقطوں کے مقام وہی ہیں، مگر اب مبداء مثبت جانب واقع ہے اور نقطہ کے محدّد (۱، -۲) خط کے دائیں رکن میں

درج کر کے دیکھتے ہیں −۲(۱) + ۳(−۲) + ۷ = −۱ یعنی نقطہ منفی جانب واقع ہے۔ پس محدّد درج کرنے سے منفی عمود حاصل ہوگا

$$\text{عمود} = \frac{-۲(۱) + ۳(-۲) + ۷}{\sqrt{۲^۲ + (-۳)^۲}} = \frac{-۱}{\sqrt{۱۳}}$$

پس (لا، ما) سے خط ا لا + ب ما + ج = ۰ پر کے عمودی فاصلہ کے لئے جو جملہ اندراج سے حاصل ہوتا ہے اس کی علامت مثبت یا منفی دونوں ہو سکتی ہے اور یہ اس امر پر منحصر ہے کہ نقطہ خط کے مثبت یا منفی جانب واقع ہے۔ نیز خط کی شکل کے دائیں رُکن میں مبداء اور نقطہ کے محدّد لا، ما درج کرنے سے معلوم ہو سکتا ہے کہ نقطہ سے عمود اُسی سمت میں کھینچا گیا ہے جس سمت میں کہ مبداء ہے یا مقابل جانب میں۔

مثال (۱) نقاط (۱، −۵)، (۲، ۳) اور مبداء کے عمودی فاصلے خط ۴ لا + ۳ ما + ۱۰ = ۰ سے حاصل کرو اور بتاؤ کہ بلحاظ مبداء سے ڈالے ہوئے عمود کے، ان نقطوں سے عمود کس سمت میں کھینچے گئے ہیں۔

$$(۱، -۵) \text{ سے عمود} = \frac{۴(۱) + ۳(-۵) + ۱۰}{+\sqrt{۴^۲ + ۳^۲}} = \frac{-۱}{۵}$$

$$(۲، ۳) \text{ " "} = \frac{۸ + ۹ + ۱۰}{۵} = + \frac{۲۷}{۵}$$

$$\text{مبداء " "} = \frac{۱۰}{۵} = + ۲$$

پس پہلے نقطہ سے متقابل جانب ہیں اور دوسرے سے مبداء والے عمود کی جانب میں عمود کھینچے گئے ہیں۔

مثال (۲) ثابت کرو کہ مبداء ۳ لا − ۴ ما − ۱۰ = ۰، ۱۲ لا − ۵ ما + ۲۶ = ۰ اور ۲۴ لا + ۷ ما − ۵۰ = ۰ سے مساوی فاصلہ پر واقع ہے۔

مثال (۳) نقطہ (ا، ب) کا عمودی فاصلہ خط $\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = ۱$ سے

دریافت کرو۔ نیز (ب، ا) کا فاصلہ خط $\frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} = ۲$ سے

جواب $\frac{ا\,ب}{\sqrt{ا^۲+ب^۲}}$ ، $\frac{(ا-ب)^۲}{\sqrt{ا^۲+ب^۲}}$

مشق ۷

(۱) مبداء میں سے گذرنے والے خطوں کی مساواتیں لکھو جو محور لا کے ساتھ زاویہ (ا) ۰° (ب) ۳۰° (ج) ۴۵° (د) ۶۰° (ع) ۱۲۰° (ف) ۱۵۰° (گ) $\frac{\pi}{۲}$ (ط) π بنائیں۔ شکل میں ان کے مقام دکھاؤ۔

اگر یہ خط مبداء میں سے گزرنے کی بجائے، نقطہ (۰، ۲) میں سے یا (۰، ۱-) میں سے یا بالعموم محور ما پر کے کسی نقطہ (۰، ب) میں گذریں اور اگر سمتیں ان کی وہی ہیں جو اوپر دی گئی ہیں تو ان کی مساواتیں کیا ہونگی۔

جواب۔ (ا) ما = ۰ (ب) $\sqrt{۳}$ ما - لا = ۰ (ج) ما = لا (د) ما - $\sqrt{۳}$ لا = ۰
(ع) ما + $\sqrt{۳}$ لا = ۰ (ف) $\sqrt{۳}$ ما - لا = ۰ (گ) لا = ۰ (ط) ما = ۰

نقطہ (۰، ۲) میں سے گزرنے والے خط (ا) ما - ۲ = ۰ (ب) ما = $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ لا + ۲
(ج) ما = لا + ۲ (د) ما = $\sqrt{۳}$ لا + ۲ (ع) ما = $-\sqrt{۳}$ لا + ۲ (ف) ما = $+\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ لا + ۲
(گ) لا = ۰ (ط) ما = ۲

اسی طرح نقطہ (۰، ۱-) میں سے گزرنے والے خط ہونگے (ب) ما = $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ لا - ۱ وغیرہ
بالعموم نقطہ (۰، ب) میں سے گزرنے والے خط (ب) ما = $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ لا + ب (د) ما = $\sqrt{۳}$ لا + ب وغیرہ

(۲) (ا) ایک خط نقطہ (۲، ۳-) میں سے گزرتا اور محور لا کے ساتھ زاویہ ۳۰°، ۴۵°، ۶۰° بناتا ہے، ہر صورت میں خط کی مساوات دریافت کرو۔

(ب) ایک خط نقطہ (۲-، ۱-) میں سے گزرتا اور محور لا کے ساتھ زاویہ ۱۲۰°، ۱۵۰° بناتا، ہر صورت میں خط کی مساوات دریافت کرو۔

جواب (ا) لا - $\sqrt{۳}$ ما - ۲ - ۳ $\sqrt{۳}$ = ۰
لا - ما - ۵ = ۰
$\sqrt{۳}$ لا - ما - ۳ - ۲ $\sqrt{۳}$ = ۰

جواب (ب) √۳ لا + ما + ۲ √۳ + ۱ = ۰

لا + √۳ ما + √۳ + ۲ = ۰

(۳) (ا) ایک خط نقطہ ا (-۲، ۱) میں سے گزرتا ہے اور محور لا کے ساتھ ۴۰° کا زاویہ بناتا ہے، خط پر نقطہ ا سے فاصلہ ۵ پر جو نقطہ ہے اس کے محدّد دریافت کرو۔

(ب) نقطہ م (-۲، -۳) میں سے گزرنے والا خط محور لا کے ساتھ زاویہ ۶۰° بناتا ہے، م سے فاصلہ -۳ پر نقطہ ن لیا گیا ہے اس کے محدّد دریافت کرو۔

جواب۔ نقطہ ا کے محدّد ((-۴ + ۵√۳)/۲، ۱/۲) نقطہ ب کے محدّد ((-۷)/۲ ، -(۶ + ۳√۳)/۲)

(۴) ذیل کے نقطوں کے جوڑوں میں سے گزرنے والے خطوں کی مساواتیں دریافت کرو:

(ا) (۰، ۲)، (-۱، -۳) (ب) (۲، ۱)، (-۳، ۱)

(ج) (۲، -۱)، (-۳، ۴)

جواب (ا) ۵ لا - ما + ۲ = ۰ (ب) ما - ۱ = ۰ (ج) لا + ما - ۱ = ۰

(۵) خطوں کی مساواتیں معلوم کرو، محوروں پر مقطوعے حسبِ ذیل دیے گئے ہیں:-

(ا) -۲، ۳ (ب) + ۱،۵، -۶

جواب (ا) ۳ لا - ۲ ما + ۶ = ۰ (ب) ۴ لا - ما - ۶ = ۰

(۶) خط کی مساوات معلوم کرو، مبداء سے خط پر کے عمود کا طول دیا گیا ہے، نیز عمود محور لا کے ساتھ جو زاویہ طہ بناتا ہے وہ بھی معلوم ہے۔

(ا) عمود = ۳، طہ = ۳۰°

(ب) عمود = ۱، طہ = ۱۲۰°

جواب (ا) √۳ لا + ما - ۶ = ۰، (ب) لا - √۳ ما + ۲ = ۰

(۷) (ا) ثابت کرو کہ نقطے (۰، -۱)، (۲، ۳)، خط ۳ لا - ۷ ما + ۲ = ۰ کی مقابل جانبوں میں واقع ہیں۔

(ب) نیز نقطے (-۳، ۱)، (۱، ۲) خط ۲لا - ۳ما + ۱ = ۰ کے ایک ہی جانب واقع ہیں -

(ج) نقطے (۰، ۷)، (۲، -۱)، (۴، ۵)، (-۱، -۱۰) ایک ہی خطِ مستقیم پر واقع ہیں -

(۸) جن خطوں کی مساواتیں حسبِ ذیل ہیں انہیں مرتسم کرو، ان کے ڈھال اور محوروں پر مقطوعے معلوم کرو، نیز مبداء سے ان پر جو عمود کھینچ سکتے ہیں ان کے طول دریافت کرو -

(ا) لا + ما = ۳ (ب) ۴لا - ۳ما = ۱۲

(ج) ۲لا - ۳ما + ۱ = ۰ (د) ۲لا + ۳ما + ۷ = ۰

جواب - ڈھال (ا) -۱ (ب) ۴/۳ (ج) ۲/۳ (د) -۲/۳

مقطوعے (ا) ۱، ۱ (ب) ۳، -۴ (ج) -۱/۲، ۱/۳ (د) -۷/۲، -۷/۳

مبدا سے عمود (ا) ۳/√۲، (ب) ۱۲/۵ (ج) ۱/√۱۳ (د) ۷/√۱۳

(۹) (ا) ایک خط نقاط (۱، ۳) اور (-۳، -۵) کے نقطۂ تنصیف میں سے گزرتا ہے اور محور لا کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بناتا ہے اس کی مساوات معلوم کرو -

(ب) اُس خط کی مساوات معلوم کرو جو (-۳، ۱) میں سے گزرتا اور محوروں پر مساوی مقطوعے کاٹتا ہے -

جواب - (ا) لا - ما = ۰ (ب) لا + ما + ۲ = ۰

(۱۰) اُس خط کی مساوات معلوم کر جو نقطہ (۴، ۵) میں سے گزرتا ہے اور

(ا) خط ۳لا - ۵ما + ۱ = ۰ کے متوازی ہے -

(ب) خط ما = √۳ لا + ۳ کے متوازی ہے -

(ج) (۱، ۳) اور (۲، -۵) کے ملانے والے خط کے متوازی ہے

جواب - (ا) ۳لا - ۵ما + ۱۳ = ۰

(ب) √۳ لا - ما + ۵ - ۴√۳ = ۰

(ج) ۸لا + ما - ۳۷ = ۰

(۱۱) ایک دائرہ کا نصف قطر ۲ ہے، اس کے مرکز میں سے ایک قطر گذرتا ہے جو محور لا کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بناتا ہے، جن نقطوں پر یہ دائرہ سے ملتا ہے وہاں پر دائرہ کے مماس کھینچے گئے ہیں، مرکز میں سے جو قطر ان مماسوں کے متوازی ہے اس کی مساوات حاصل کرو۔ نیز ان مماسوں کی مساواتیں لکھو۔

جواب۔ قطر ما + لا = ۰، مماس لا + ما ∓ ۲ √۲ = ۰

(۱۲) (ا) ایک مثلث کے نقاط راس (۰، ۰)، (+۲، +۳)، (-۴، +۲) ہیں، ان کے اضلاع کی مساواتیں دریافت کرو۔

(ب) ایک مثلث کے نقاط راس (۱، ۲)، (-۲، ۳)، (-۳، -۴) ہیں، اس کے اضلاع کی مساواتیں دریافت کرو۔

جواب (ا) اضلاع ۳لا - ۲ما = ۰، لا - ۶ما + ۱۶ = ۰، لا + ۲ما = ۰

(ب) لا + ۳ما - ۷ = ۰، ۷لا - ما + ۱۷ = ۰، ۳لا - ۲ما + ۱ = ۰

(۱۳) مثلث (۲، ۳)، (-۲، ۵)، (۳، -۴) کے اضلاع کی مساواتیں دریافت کرو، نیز اس کے وسطانیوں کی مساواتیں حاصل کرو۔

جواب۔ اضلاع لا + ۲ما - ۸ = ۰، ۹لا + ۵ما - ۷ = ۰، ۷لا + ما - ۱۷ = ۰

وسطانئے۔ ۵لا - ۳ما - ۱ = ۰، ۱۱لا + ۹ما - ۲۳ = ۰، ۸لا + ۳ما - ۱۲ = ۰

(۱۴) (ا) بتاؤ کہ خط ۲لا + ۳ما = ۰، نقاط (۳، ۴)، (۲، -۵) کے ملانے والے خط کو کس نسبت سے تقسیم کرتا ہے۔ جواب۔ نسبت ۱۸/۱۱

(ب) بتاؤ کہ نقاط (۵، ۲) اور (-۱۰، ۱) کو ملانے والا خط، نقطوں (۱، ۴) اور (-۳، -۲) کے ملانے والے خط کو کس نسبت سے تقسیم کرتا ہے۔

جواب۔ تنصیف کرتا ہے۔

(۱۵) (ا) نقاط (۳، ۴)، (-۴، ۱)، (+۵، -۳) سے جو مثلث بنتا ہے اس کے اضلاع کی مساواتیں دریافت کرو، مبداء سے اضلاع پر جو عمود کھینچ سکتے ہیں ان کے طول دریافت کرو۔ نیز مثلث کے راسوں سے مقابل کے اضلاع پر جو عمود کھینچے جا سکتے ہیں ان کے طول دریافت کرو۔

جواب۔ اضلاع ۴لا + ۹ما + ۷ = ۰، ۷لا + ۲ما - ۲۹ = ۰، ۳لا - ۷ما + ۱۹ = ۰

مبداء سے عمود $\frac{۷}{۹۷}\sqrt{۹۷}$ ، $\frac{۲۹}{۵۳}\sqrt{۵۳}$ ، $\frac{۱۹}{۵۸}\sqrt{۵۸}$

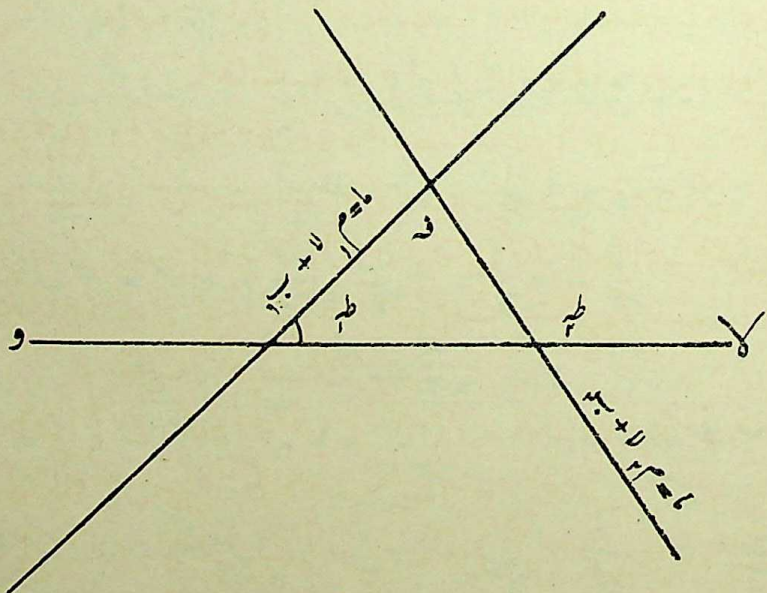
راسوں سے عمودوں کے طول $\frac{۵۵}{۹۷}\sqrt{۹۷}$ ، $\frac{۵۵}{۵۳}\sqrt{۵۳}$ ، $\frac{۴۵}{۵۸}\sqrt{۵۸}$

(۱۶) اُن خطوں کی مساواتیں دریافت کرو جو نقاط (۲، ۱) اور (۲-، ۳-) میں سے گزرتے ہیں اور خط ۳لا + ۵ما + ۱ = ۰ کے متوازی ہیں، اور ان کے درمیان عمودی فاصلہ دریافت کرو۔

جواب ۔ مساواتیں ۳لا + ۵ما - ۱۱ = ۰، ۳لا + ۵ما + ۲۱ = ۰

عمودی فاصلہ $\frac{۱۶}{۱۷}\sqrt{۳۴}$

۲٫۴ - دو خطوں کے درمیان زاویہ -

اب تک ایک خط اور اس کی مساوات کے متعلق بحث تھی ۔ اب فرض کرو کہ (ا) دو خطوں کی مساواتیں ما = م۱ لا + ب۱ اور ما = م۲ لا + ب۲ ہیں اور ان کا درمیانی زاویہ مطلوب ہے۔

اگر خطوں کے زاویے محور لا کی مثبت سمت کے ساتھ ط۱، ط۲ ہوں اور درمیانی

زاویہ فہ ہو

مس طہ$_1$ = م$_1$، مس طہ$_2$ = م$_2$

فہ = طہ$_2$ − طہ$_1$

مس فہ = مس (طہ$_2$ − طہ$_1$)

$$= \frac{\text{مس طہ}_2 - \text{مس طہ}_1}{1 + \text{مس طہ}_1 \text{ مس طہ}_2} = \frac{\text{م}_2 - \text{م}_1}{1 + \text{م}_1 \text{م}_2}$$

پس فہ = مس$^{-1}$ $\frac{\text{م}_2 - \text{م}_1}{1 + \text{م}_1 \text{م}_2}$ اور دوسرا درمیانی زاویہ π − فہ ہوگا اور

مس (π − فہ) = − مس فہ = $\frac{\text{م}_1 - \text{م}_2}{1 + \text{م}_1 \text{م}_2}$ = $\frac{\text{م}_1 - \text{م}_2}{1 + \text{م}_1 \text{م}_2}$ یعنی جملہ کی علامت بدل جائیگی ۔

خط باہم متوازی ہونگے اگر م$_1$ = م$_2$ اور باہم عمود وار ہونگے اگر م$_1$م$_2$ + ۱ = ۰،

یعنی م$_2$ = − $\frac{1}{\text{م}_1}$

(ب) اگر خطوں کی مساواتیں ا$_1$ لا + ب$_1$ ما + ج$_1$ = ۰

اور ا$_2$ لا + ب$_2$ ما + ج$_2$ = ۰

ہوں تو مس طہ$_1$ = م$_1$ = − $\frac{\text{ا}_1}{\text{ب}_1}$، مس طہ$_2$ = م$_2$ = − $\frac{\text{ا}_2}{\text{ب}_2}$

$$\text{پس مس فہ} = \frac{\text{م}_2 - \text{م}_1}{1 + \text{م}_1 \text{م}_2} = \frac{-\frac{\text{ا}_2}{\text{ب}_2} + \frac{\text{ا}_1}{\text{ب}_1}}{1 + \frac{\text{ا}_1 \text{ا}_2}{\text{ب}_1 \text{ب}_2}} = \frac{\text{ا}_1 \text{ب}_2 - \text{ا}_2 \text{ب}_1}{\text{ا}_1 \text{ا}_2 + \text{ب}_1 \text{ب}_2}$$

خط متوازی ہونگے اگر ا$_1$ ب$_2$ − ا$_2$ ب$_1$ = ۰ یعنی اگر $\frac{\text{ا}_1}{\text{ا}_2} = \frac{\text{ب}_1}{\text{ب}_2}$

اور باہم عمود وار ہونگے اگر ا$_1$ ا$_2$ + ب$_1$ ب$_2$ = ۰

یاد رہے کہ خطوں کا درمیانی زاویہ معلوم کرنے کے لیے صرف م۱، م۲ اور دوسری صورت میں صرف لا، ما کے سر شریک ہوتے ہیں مستقل رقوم شریک نہیں ہوتیں کیونکہ مستقل رقم کا اثر خط کے میلان یعنی سمت پر نہیں پڑتا، بلکہ صرف خط کے محل کی تبدیلی ہو جاتی ہے۔

دو خط ۳ لا ـ ۷ ما + ۱۱ = ۰ ۳ لا ـ ۷ ما + ۲۰ = ۰ باہم متوازی ہیں۔

اور دو خط ۳ لا ـ ۷ ما + ۱۱ = ۰ اور ۷ لا + ۳ ما + ۳۱ = ۰

ایک دوسرے پر علی القوائم ہیں۔ واضح ہو کہ متوازی ہونے کے لیے خطوں کے "م" وہی ہونا چاہییں اور علی القوائم ہونے کے لیے لا، ما کے سر باہم بدل جاتے ہیں اور کسی ایک کی علامت بھی تبدیل ہو جاتی ہے۔

ہم بہ آسانی دیکھ سکتے ہیں کہ نقطہ (لا۱، ما۱) میں سے گزرنے والا خط جو ا لا + ب ما + ج = ۰ پر علی القوائم ہے مساوات $\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{ا}} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{ب}}$ (ع) سے تعبیر ہوتا ہے۔ یہ ضروری شکل ہے۔ اس خط کا م $\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ ہے اور دیے ہوئے خط کا $-\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ حاصل ضرب ـ ۱ ہے۔

مثال (۱) خطوں ۳ لا ـ ۴ ما + ۷ = ۰ اور لا ـ ۲ ما + ۱۱ = ۰ کے درمیان زاویہ معلوم کرو۔

$$\text{م}_1 = \frac{3}{4}\text{، م}_2 = \frac{1}{2}\text{، مس فہ} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{4}}{1 + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}} = \frac{\frac{2}{8}}{\frac{11}{8}}$$

$$= \frac{2}{11} = \text{۰٫۱۸۱۸}$$

جدولوں سے فہ = ۱۲° ۱۶′ تقریباً

مثال (۲) خطوط ۳ لا + ۴ ما + ۷ = ۰ اور لا ـ ما + ۹ = ۰ کے درمیان حادّہ زاویہ دریافت کرو۔

$$\text{م}_1 = \text{۱، م}_2 = -\frac{3}{4}\text{، مس فہ} = \frac{\frac{3}{4} + 1}{\frac{3}{4} - 1} = \frac{7}{1}\text{، فہ} = \text{مس}^{-1}\text{۷}$$

مثال (۳) اس خط کی مساوات دریافت کرو جو مبداء میں سے

گزرتا ہے اور نقاط (۳، ۴) اور (-۶، ۵) کے ملانے والے خط پر علی القوائم ہے۔
نقاط (۳، ۴) اور (-۶، ۵) کے ملانے والے خط کی مساوات یہ ہے

(لا - ۳)/(۳ + ۶) = (ما - ۴)/(۵ - ۴) یعنی (لا - ۳) + ۹ (ما - ۴) = ۰

یعنی لا + ۹ ما - ۳۹ = ۰

کوئی خط جو اس پر علی القوائم ہوگا اس کی مساوات یہ ہوگی
۹ لا - ما + ا = ۰۔ جہاں ا کوئی مستقل ہے۔ خط پر ایک اور شرط
عائد کی جا سکتی ہے، اس سے ا کی قیمت معلوم ہو جائیگی۔
خط مبداء میں سے گزرتا ہے اس لیے ا = ۰، اور خط مطلوبہ ہے

۹ لا - ما = ۰

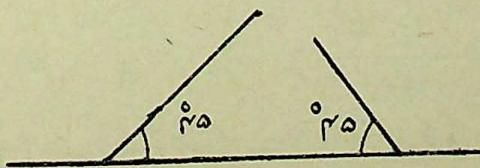
مثال (۴) نقطہ (-۲، ۳) میں سے گزرنے والے ان دو خطوں کی مساواتیں معلوم کرو جو خط ۲ لا - ۳ ما - ۶ = ۰ کے ساتھ ۴۵° کے زاویے بنائیں
خط ۲ لا - ۳ ما - ۶ = ۰ کا مس طہ = ۲/۳ ہے، فرض کرو کہ جو خطِ مستقیم اس خط کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بناتا ہے، اُس کا ڈھال م ہے۔ تب

۱ = مس ۴۵° = (م - ۲/۳)/(۱ + م × ۲/۳) یعنی ۱ + ۲/۳ م = م - ۲/۳

یعنی م (۱ - ۲/۳) = ۱ + ۲/۳، م/۳ = ۵/۳ یعنی م = ۵

اگر ۱ = مس ۴۵° = (۲/۳ - م)/(۱ + م × ۲/۳) تو ۱ + ۲/۳ م = ۲/۳ - م

یعنی ۵/۳ م = - ۱/۳، پس م = - ۱/۵

یہ دونوں قیمتیں ممکن ہیں۔ یعنی میلان زیرِ بحث کے لیے دو سمتیں ہیں۔

پس خطوں کی مساواتیں یہ ہو سکتی ہیں :

ما = ۵ لا + ا

ما = -⅕ لا + ب

خط نقطہ (-۲، ۳) میں سے گزرتے ہیں۔ اس لیے

۳ = ۵ (-۲) + ا، یعنی ا = ۱۳

اور ۳ = -⅕ (-۲) + ب، یعنی ب = ۳ - ۲/۵ = ۱۳/۵

پس خط ہیں ما = ۵ لا + ۱۳

اور ما = -⅕ لا + ۱۳/۵ یعنی لا + ۵ ما - ۱۳ = ۰

اور یہ ظاہر ہے کہ خط علی القوائم ہیں کیونکہ ڈھالوں کا حاصل ضرب ۵(-⅕) = -۱
طالب علم خطوں کو مرتسم کر کے جملہ امور کی تصدیق کرے۔

مثال (۵)۔ اِن خطوں کے جوڑوں کے درمیان زاویے دریافت کرو۔

(ا) ما - ۲لا + ۳ = ۰۔ اور ۳ لا + ما + ۵ = ۰۔ (ب) ۳لا - ۵ ما + ۱۱ = ۰،
۵لا + ۳ ما + ۹ = ۰۔ (ج) ۲√۳ لا - ۲ما + ۷ = ۰۔ اور لا - √۳ ما + ۱۱ = ۰۔
(د) لا + ۲ ما + ۱ = ۰۔ اور ۲لا - ۳ ما + ۷ = ۰۔

جواب (ا) ۴۵° (ب) ۹۰° (ج) π/۶ (د) مس⁻¹(۵،۲۵) = ۱۲' ۲۹° تقریباً

مثال (۶) خطوں کی مساواتیں معلوم کرو جو (۱، -۱)، (-۲، -۳)، (۳، -۵) میں سے گزرتے ہیں اور خطوط (ا) ۳لا - ۴ما + ۷ = ۰۔ (ب) ۲لا + ما + ۳ = ۰۔ کے متوازی ہیں۔

جواب (ا) ۳ لا - ۴ما - ۷ = ۰، ۳ لا - ۴ ما - ۶ = ۰، ۳لا - ۴ما - ۲۹ = ۰۔

(ب) ۲لا + ما - ۱ = ۰، ۲لا + ما + ۷ = ۰، ۲لا + ما - ۱ = ۰۔

مثال (۷) خط نقاط (-۱، +۱)، (-۳، ۲)، (-۱، -۳) میں سے گزرے اور بالترتیب خطوں (ا) لا + ۲ما + ۱ = ۰۔ (ب) ۳ لا - ۷ما + ۱ = ۰ پر علی القوائم ہیں ان کی مساواتیں دریافت کرو۔

جواب (ا) ۲ لا - ما + ۳ = ۰، ۲لا - ما + ۸ = ۰، ۲لا - ما - ۱ = ۰۔

جواب (ب) ۷لا + ۳ما + ۴ = ۰، ۷لا + ۳ما + ۱۵ = ۰، ۷لا + ۳ما + ۱۶ = ۰

۲۷۳۔ (ا) دو خطوں کا نقطۂ تقاطع ۔ فرض کرو کہ خطوں کی مساواتیں

$\text{ا}_1\text{لا} + \text{ب}_1\text{ما} + \text{ج}_1 = 0$ اور $\text{ا}_2\text{لا} + \text{ب}_2\text{ما} + \text{ج}_2 = 0$ ہیں، نقطۂ تقاطع $(\text{لا}_1, \text{ما}_1)$ دونوں خطوں پر واقع ہے، یہ دونوں مساواتیں پوری کریگا، یعنی

$$\text{ا}_1\text{لا}_1 + \text{ب}_1\text{ما}_1 + \text{ج}_1 = 0$$

$$\text{ا}_2\text{لا}_1 + \text{ب}_2\text{ما}_1 + \text{ج}_2 = 0$$

پس انھیں بطور ہمزاد مساواتوں کے حل کرنے پر نقطۂ تقاطع کے محدّد حاصل ہوتے ہیں ۔ پس

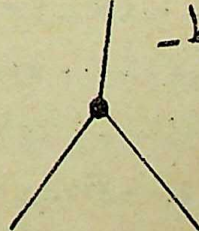
$$\text{لا}_1 = \frac{\text{ب}_1\text{ج}_2 - \text{ب}_2\text{ج}_1}{\text{ا}_1\text{ب}_2 - \text{ا}_2\text{ب}_1} ، \quad \text{ما}_1 = \frac{\text{ج}_1\text{ا}_2 - \text{ج}_2\text{ا}_1}{\text{ا}_1\text{ب}_2 - \text{ا}_2\text{ب}_1}$$

مثال ۔ خطوں ۳لا − ۲ما − ۷ = ۰ اور ۵لا + ۴ما − ۱۹ = ۰ کے نقطۂ تقاطع کے محدّد دریافت کرو

۳لا − ۲ما − ۷ = ۰	۵	۴
۵لا + ۴ما − ۱۹ = ۰	−۳	۲

پہلی مساوات کو ۵ دوسری کو −۳ سے ضرب دی جانے سے

−۲۲ما + ۲۲ = ۰، ما = ۱، اسی طرح ۲۲لا − ۶۶ = ۰، لا = ۳، نقطۂ تقاطع (۳، ۱) جو دونوں مساواتوں کو پورا کرتا ہے اور یہ ہندسی خطوط اُس نقطہ پر کاٹتے ہیں جس کے محدّد (۳، ۱) ہیں۔

(ب) تین خطوں کے ایک ہی نقطہ میں سے گزرنے کے لیے شرط ۔

ایک مستوی میں اگر کوئی تین خط ہوں تو ان کے باہم کاٹنے سے مثلث بنیگا،

اگر تین خط ایک ہی نقطہ میں سے گزریں تو یہ کوئی عام خط نہیں ہو سکتے یعنی خطوں کے مستقل ا، ب، ج، وغیرہ جن سے خطوں کا محل معین ہوتا ہے ایک دوسرے سے غیر متعلق نہیں ہونگے، ان میں ایک رشتہ ہوگا یعنی ایک شرط ہوگی جسے ہم معلوم کرتے ہیں۔

نقطۂ تقاطع تینوں خطوں کی مساواتیں پوری کریگا۔

$$\text{ا}_1\,\text{لا} + \text{ب}_1\,\text{ما} + \text{ج}_1 = 0$$

$$\text{ا}_2\,\text{لا} + \text{ب}_2\,\text{ما} + \text{ج}_2 = 0$$

$$\text{ا}_3\,\text{لا} + \text{ب}_3\,\text{ما} + \text{ج}_3 = 0$$

آخری دو مساواتوں سے

$$\text{لا} = \frac{\text{ب}_2\text{ج}_3 - \text{ب}_3\text{ج}_2}{\text{ا}_2\text{ب}_3 - \text{ا}_3\text{ب}_2}\ ,\quad \text{ما} = \frac{\text{ج}_2\text{ا}_3 - \text{ج}_3\text{ا}_2}{\text{ا}_2\text{ب}_3 - \text{ا}_3\text{ب}_2}$$

یہ لا، ما کی قیمتیں پہلی مساوات کو پورا کرتی ہیں، ان کو درج کرنے سے

$$\text{ا}_1(\text{ب}_2\text{ج}_3 - \text{ب}_3\text{ج}_2) + \text{ب}_1(\text{ج}_2\text{ا}_3 - \text{ج}_3\text{ا}_2) + \text{ج}_1(\text{ا}_2\text{ب}_3 - \text{ا}_3\text{ب}_2) = 0$$

جو مطلوبہ شرط ہے۔

طالبِ علم جو مقطعات کے نظریہ سے واقف ہے دیکھیگا کہ اوپر کی تین مساواتیں لا، ما کی ایک ہی قیمتوں کے لیے پوری ہوتی ہیں لا، ما کو ساقط کرنے سے

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} = 0$$

اس مقطعہ کو پھیلانے سے اوپر کی شرط حاصل ہوتی ہے۔

طالبِ علم کئی صورتوں سے واقف ہے جن میں تین خط ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں، مثلاً مثلث کے وسطانیے تین خط ہیں جو ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں، اسی طرح مثلث کے منصف، راسوں سے مقابل کے اضلاع پر گرائے ہوئے

عمود، وغیرہ، سب ایسی مثالیں ہیں جن میں تین خط ایک نقطہ میں سے گزرتے ہیں؛ ہر صورت میں تین خطوں کی مساواتوں میں جو مستقل ہیں وہ اُوپر کی شرط کو پورا کرینگے۔

مثال ۔ ایک مثلث کے راس (۲، ۳)، (-۴، ۱)، (۳، -۷) ہیں، اس کے وسطانیوں کی مساواتیں دریافت کرو اور ثابت کرو کہ یہ ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔

ایک وسطانیہ نقطہ (۲، ۳) کو نقاط (-۴، ۱) اور (۳، -۷) کے وسطی نقطہ (-۱/۲، -۳) کے ساتھ ملاتا ہے، اس کی مساوات

$$\frac{\text{لا} - ۲}{۲ + \frac{۱}{۲}} = \frac{\text{ما} - ۳}{۳ + ۳}$$ یعنی ۱۲ لا - ۵ ما - ۹ = ۰

اسی طرح باقی دو وسطانیے ہیں ۶ لا + ۱۳ ما + ۱۱ = ۰ اور ۹ لا + ۴ ما + ۱ = ۰
اگر یہ تینوں ایک نقطہ میں سے گزرتے ہیں تو تینوں مساواتیں

۱	۱۲ لا - ۵ ما - ۹ = ۰
۱	۶ لا + ۱۳ ما + ۱۱ = ۰
-۲	۹ لا + ۴ ما + ۱ = ۰

ایک ساتھ پوری ہونگی ۔ اور ان مساواتوں کے مستقلات سے اُوپر کی شرط پوری ہونا چاہیے۔

۱۲ (۱۳×۱ - ۴×۱۱) - ۵ (۱۱×۹ - ۱×۶) - ۹ (۶×۴ - ۹×۱۳)

= ۱۲×(-۳۱) - ۵ (۹۳) - ۹ (-۹۳) = -۳۷۲ - ۴۶۵ + ۸۳۷

= -۸۳۷ + ۸۳۷ = ۰

یہ شرط پوری ہوتی ہے۔

یا پہلی دو مساواتوں سے لا = ۱/۲، ما = -۱، تیسری مساوات میں درج کرنے سے

۹ (۱/۲) + ۴ (-۱) + ۱ = ۰

یعنی تینوں مساواتیں نقطہ (۱/۲، -۱) کے لیے پوری ہوتی ہیں۔

نوٹ۔ ان مساواتوں کے دائیں رُکنوں کو بالترتیب ۱، ۱، ۲ سے ضرب دینے سے

۱(۱۲لا - ۵ما - ۹) + ۱(۶لا + ۱۳ما + ۱۱) - ۲(۹لا + ۴ما + ۱)

= (۱۲ + ۶ - ۱۸)لا + (-۵ + ۱۳ - ۸)ما - ۹ + ۱۱ - ۲

= ۰ × لا + ۰ × ما + ۰ = ۰

اور یہ لا، ما کی تمام قیمتوں کے لیے صفر ہوگا۔ ایک نقطہ میں سے گزرنے والے تین خطوں کے رُکنوں کو مناسب مستقل مقداروں سے ضرب دے کر ایک جملہ مرتب کرنا ممکن ہے جو متماثلاً صفر ہوگا۔

۱۳۲۔ (ا) ایسے خط کی مساوات جو دو خطوط کے نقطۂ تقاطع میں سے گزرتا ہے۔

فرض کرو کہ دو معلومہ خط ا۱ لا + ب۱ ما + ج۱ = ۰ اور ا۲ لا + ب۲ ما + ج۲ = ۰ ہیں
ا۱ لا + ب۱ ما + ج۱ + ل(ا۲ لا + ب۲ ما + ج۲) = ۰ جہاں ل کوئی اختیاری مستقل ہے۔ ایک خطِ مستقیم کی مساوات ہے کیونکہ یہ لا، ما میں درجۂ اول کی مساوات ہے۔ نیز چونکہ خطوں ا۱ لا + ب۱ ما + ج۱ = ۰ اور ا۲ لا + ب۲ ما + ج۲ = ۰ کا نقطۂ تقاطع اِن دو خطوں کی مساواتوں کو پورا کرتا ہے، اس لیے اس کے محدد مساوات

ا۱ لا + ب۱ ما + ج۱ + ل(ا۲ لا + ب۲ ما + ج۲) = ۰ (ا)

کو بھی پورا کرتے ہیں، کیونکہ ان نقطوں کے درج کرنے سے اِس مساوات کے رُکن الگ الگ صفر ہوتے ہیں۔ پس (ا) ایسے خط کی مساوات ہے جو دیے ہوئے خطوں کے نقطۂ تقاطع میں سے گزرتا ہے۔

اب نقطۂ تقاطع میں سے گزرنے والے بے شمار خط ہوسکتے ہیں مستقل ل کو مناسب قیمت دینے سے خط (ا) سے کوئی دوسری شرط پوری کرائی جاسکتی ہے۔

مثال (۱) اُس خط کی مساوات معلوم کرو جو ۳لا + ۵ما + ۲ = ۰ اور ۲لا - ۳ما + ۴ = ۰ کے نقطۂ تقاطع کو مبداء سے ملاتا ہے۔

۳ لا + ۵ ما + ۲ + ل (۲ لا − ۳ ما + ۴) = ۰

ایسے کسی خط کی مساوات ہے جو دیے ہوئے خطوں کے نقطۂ تقاطع میں سے گزرتا ہے جہاں ل کوئی مستقل ہے۔ اب یہ خط مبداء میں سے گزرتا ہے، اس لیے مبداء کے محدد (۰، ۰) اس میں درج کرنے سے

۲ + ۴ ل = ۰، ل = − ۱/۲

پس مطلوبہ خط ہے ۳ لا + ۵ ما + ۲ − ۱/۲ (۲ لا − ۳ ما + ۴) = ۰

یعنی ۴ لا + ۱۳ ما = ۰۔

واضح ہو کہ پہلے خطوں کے نقطۂ تقاطع کے محدد معلوم کیے جا سکتے ہیں اور اس نقطہ کو مبداء سے ملانے والے خط کی مساوات بہ آسانی حاصل ہو سکتی ہے۔

مثلاً نقطۂ تقاطع ہے (− ۱۳/۸، ۱/۲) اور اس نقطہ کو مبداء سے ملانے والے خط کی مساوات

ہے لا / (− ۱۳/۸) = ما / (۱/۲) یعنی وہی ۴ لا + ۱۳ ما = ۰۔

مثال (۲) خطوط ۲ لا − ۷ ما + ۳ = ۰، ۳ لا + ۲ ما + ۴ = ۰ کے نقطۂ تقاطع میں سے ایک خط گزرتا ہے اور یہ (ا) محور لا کے متوازی ہے (ب) محور ما کے متوازی ہے (ج) مبداء میں سے گزرتا ہے۔ ہر صورت میں اس کی مساوات دریافت کرو۔

جواب (ا) ۲۵ ما − ۱ = ۰۔ (ب) ۲۵ لا + ۳۴ = ۰۔ (ج) لا + ۳۴ ما = ۰۔

(۲) گذشتہ دفعہ میں تین خطوں کے ایک ہی نقطہ میں سے گزرنے کے لیے شرط (ا) دریافت کی گئی تھی جو ایک مقطعہ کی شکل میں بھی لکھی جا سکتی ہے۔ اب ہم دیکھینگے کہ یہی شرط ایک اور طرح بھی بیان ہو سکتی ہے۔ تین خط

ا$_1$ لا + ب$_1$ ما + ج$_1$ = ۰، ا$_2$ لا + ب$_2$ ما + ج$_2$ = ۰، ا$_3$ لا + ب$_3$ ما + ج$_3$ = ۰

ایک ہی نقطہ میں سے گزرینگے اگر ذیل کے جملہ میں، مستقلات ل، م، ن کے لیے

ایسی مناسب قیمتیں معلوم ہوسکیں کہ جملہ

ل (ا$_1$ لا + ب$_1$ ما + ج$_1$) + م (ا$_2$ لا + ب$_2$ ما + ج$_2$) + ن (ا$_3$ لا + ب$_3$ ما + ج$_3$) ...(ص)

متماثلاً صفر کے مساوی ہو [یعنی لا، ما کی سب قیمتوں کے لیے صفر ہو]
اگر پہلے دو خط لاَ، ماَ میں سے گزریں تو

ا$_1$ لاَ + ب$_1$ ماَ + ج$_1$ = ۰ ۔ اور ا$_2$ لاَ + ب$_2$ ماَ + ج$_2$ = ۰ ۔

اب چونکہ جملہ (ص)، لا، ما کی سب قیمتوں کے لیے صفر ہوتا ہے، اس لیے یہ لاَ، ماَ کے لیے بھی صفر ہوگا، اس لیے ا$_3$ لاَ + ب$_3$ ماَ + ج$_3$ = ۰ ۔

یعنی لاَ، ماَ خط ا$_3$ لا + ب$_3$ ما + ج$_3$ = ۰ پر بھی واقع ہے۔
پس اگر ل، م، ن کی مناسب قیمتیں معلوم ہوسکیں جن کے لیے (ص) متماثلاً صفر ہو جائے تو تینوں خط ہم نقطہ ہوں گے۔
یہ شرط فی الحقیقت وہی ہے جو پہلے معلوم ہوئی، کیونکہ متماثلاً صفر ہونے کے لیے ضروری ہے کہ لا کا، ما کا سر اور مستقل رقم صفر ہوں یعنی

ا$_1$ ل + ا$_2$ م + ا$_3$ ن = ۰

ب$_1$ ل + ب$_2$ م + ب$_3$ ن = ۰

ج$_1$ ل + ج$_2$ م + ج$_3$ ن = ۰

ل، م، ن کو ان تین مساواتوں سے ساقط کرنے سے وہ مقطعہ حاصل ہوتا ہے، جو پہلے ملا، یا پہلی دو مساواتوں کو ل، م، ن کے لیے حل کر کے تیسری مساوات میں درج کریں تو گذشتہ دفعہ کی شرط (ا) حاصل ہوگی۔

مثال ۔ ایک مثلث کے اضلاع ۳ لا + ۱۱ ما + ۴ = ۰،

۵ لا + ۴ ما − ۲۲ = ۰، ۲ لا − ۷ ما + ۱۷ = ۰ ہیں، اس کے اضلاع کے وسطی نقاط سے اضلاع پر عمود کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ یہ تین عمود ایک ہی

نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔

اضلاع کے تقاطع سے نقاطِ راس حاصل ہوتے ہیں ا(۲، ۳) ب(−۵، ۱) ج(۶، −۲)

ب ج کا وسطی نقطہ ہے (½، −½)

ب ج کے وسطی نقطے (½، −½) میں سے عمود خط ۳ لا + ۱۱ ما + ۴ = ۰ پر

ہے (لا − ½) / ۳ = (ما + ½) / ۱۱

یعنی ۱۱ لا − ۳ ما − ۷ = ۰

ج ا کے وسطی نقطہ (۴، ½) میں سے خط ۵ لا + ۴ ما − ۲۲ = ۰ پر عمود

(لا − ۴) / ۵ = (ما − ½) / ۴ یعنی ۸ لا − ۱۰ ما − ۳۷ = ۰

ا ب کے نقطہ وسطی (− ۳/۲، ۲) میں سے خط ۲ لا − ۷ ما + ۱۷ = ۰ پر عمود

ہے (لا + ۳/۲) / ۲ = (ما − ۲) / −۷ یعنی ۱۴ لا + ۴ ما + ۱۳ = ۰

اب جملہ (ص) ل (۱۱ لا − ۳ ما − ۷) + م (۸ لا − ۱۰ ما − ۳۷) + ن (۱۴ لا + ۴ ما + ۱۳)
میں اگر ل، م، ن مستقلات −۲، ۱، ۱ کے متناسب لیے جائیں تو یہ جملہ

لا کی تمام قیمتوں کے لیے صفر ہوتا ہے کیونکہ لا، ما کے سر اور مستقل رقم الگ الگ صفر ہو جاتے ہیں۔ پس یہ تینوں خط یعنی مثلث کے وسطی نقاط سے اضلاع پر کے عمود ایک نقطہ میں ملتے ہیں۔

(۳) اس کے لیے شرط بہ آسانی معلوم ہو سکتی ہے کہ تین نقطے (لا۱، ما۱)، (لا۲، ما۲)، (لا۳، ما۳) ایک ہی خط پر واقع ہوں۔

فرض کرو کہ یہ تینوں نقطے خط ا لا + ب ما + ج = ۰ پر واقع ہوتے ہیں۔ تب

$$\text{ا لا}_۱ + \text{ب ما}_۱ + \text{ج} = ۰$$

$$\text{ا لا}_۲ + \text{ب ما}_۲ + \text{ج} = ۰$$

$$\text{ا لا}_۳ + \text{ب ما}_۳ + \text{ج} = ۰$$

پہلی دو مساواتوں سے

$$\frac{\text{ا}}{\text{ما}_۱ - \text{ما}_۲} = \frac{\text{ب}}{\text{لا}_۲ - \text{لا}_۱} = \frac{\text{ج}}{\text{لا}_۱\text{ما}_۲ - \text{لا}_۲\text{ما}_۱}$$

تیسری مساوات میں درج کرنے سے

$$\text{لا}_۳ (\text{ما}_۱ - \text{ما}_۲) + \text{ما}_۳ (\text{لا}_۲ - \text{لا}_۱) + \text{لا}_۱\text{ما}_۲ - \text{لا}_۲\text{ما}_۱ = ۰$$

یعنی

$$\text{لا}_۱\text{ما}_۲ - \text{لا}_۲\text{ما}_۱ + \text{لا}_۲\text{ما}_۳ - \text{لا}_۳\text{ما}_۲ + \text{لا}_۳\text{ما}_۱ - \text{لا}_۱\text{ما}_۳ = ۰ \quad \ldots\ldots (\text{ط})$$

یہ شرط ہے کہ تین نقطے ہم خط ہوں۔

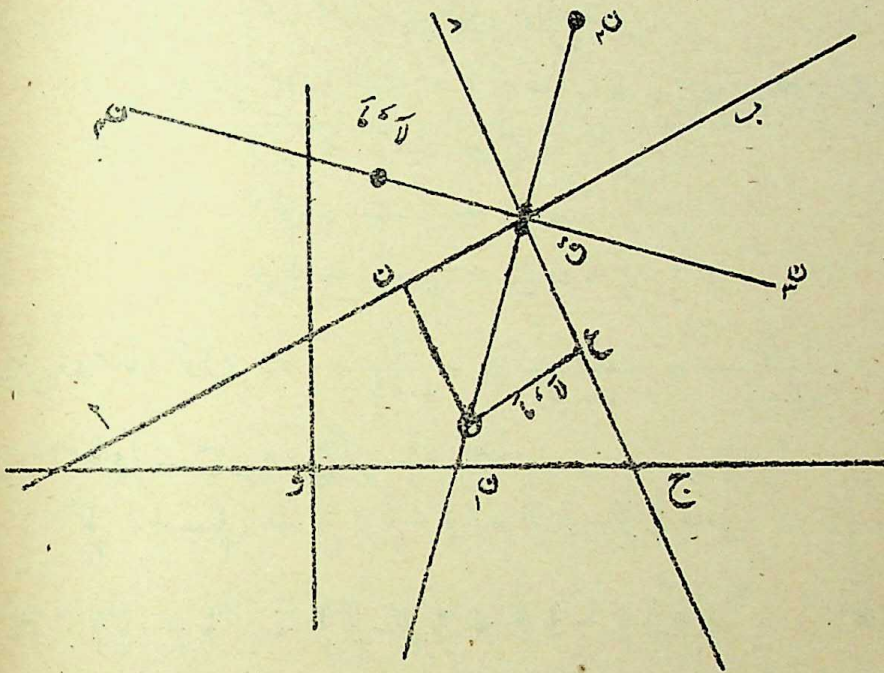
اوپر کی تین مساواتوں سے ا، ب، ج ساقط کر کے نتیجہ مقطعہ کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{vmatrix} \text{لا}_۱ & \text{ما}_۱ & ۱ \\ \text{لا}_۲ & \text{ما}_۲ & ۱ \\ \text{لا}_۳ & \text{ما}_۳ & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

، اس مساوات کا ہندسی مفہوم یہ ہے کہ تین نقطے اگر ہم خط ہیں تو ان سے جو مثلث بنتا ہے اس کا رقبہ صفر ہے۔

۲۴ ۔ دو خطوں کے درمیانی زاویوں کے مُنصّفوں کی مساواتیں دریافت کرنا۔

(۱) خطوں کی مساواتیں $\text{لا جم عہ}_۱ + \text{ما جب عہ}_۱ - \text{ع} = ۰$ اور

لا جم عہ$_2$ + ما جب عہ$_2$ − ع$_2$ = ۰ ہیں، ان کے درمیانی زاویوں کے مُنصِّفوں کی مساواتیں مطلوب ہیں۔

اب اور ج د دیے ہوئے خط ہیں، اور ن ن$_2$، ن ن$_3$ منصّف ہیں۔
اگر ان مُنصِّفوں پر کہیں نقطہ (لاَ، مَا) لیا جائے اور اس سے خطوط پر عمود نکالے جائیں تو ان عمودوں کے طول مساوی ہونگے، عمودوں کے طول مساوات کی عمودی شکل میں محض محدّد درج کرنے سے حاصل ہوتے ہیں، پس
لاَ جم عہ$_1$ + مَا جب عہ$_1$ − ع$_1$ = مثبت یا منفی دوسرے خط پر کا عمود
= ± (لاَ جم عہ$_2$ + مَا جب عہ$_2$ − ع$_2$)
یہ نقطہ (لاَ، مَا) دونوں مُنصِّفوں پر کہیں واقع ہوسکتا ہے، زیر نکال دینے سے مُنصِّفوں کی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں

لا جم عہ$_1$ + ما جب عہ$_1$ − ع$_1$ = ± (لا جم عہ$_2$ + ما جب عہ$_2$ − ع$_2$)......(س)

واضح ہو کہ یہ مُنصِّف ایک دوسرے پر علی القوائم ہیں کیونکہ

(جم عہ۱ - جم عہ۲) (جم عہ۱ + جم عہ۲) + (جب عہ۱ - جب عہ۲) (جب عہ۱ + جب عہ۲)

= جم۲ عہ۱ - جم۲ عہ۲ + جب۲ عہ۱ - جب۲ عہ۲ = ۱ - ۱ = ۰

اب (س) سے جو دو مُنصِّف تعبیر ہوتے ہیں ان میں تمیز کرنا چاہیئے کہ ان میں سے ایک مساوات کس مُنصِّف کو تعبیر کرتی ہے اور دوسری کس کو۔

خط ا ب اور ج د مستوی کو چار حصّوں میں تقسیم کرتے ہیں، ایک حصہ ج ق ا میں مبداء واقع ہے۔ دو مُنصِّفوں میں سے ایک ن ن۱ اُس حصّہ میں سے گزرتا ہے جس میں مبداء واقع ہے۔ اس مُنصِّف پر کا نقطہ (لاَ، مَا) دونوں خطوں کے اُسی جانب واقع ہے جس جانب مبداء ہے۔

اب مبداء سے خطوں پر عمود ہیں ع۱ اور ع۲ جو ان جملوں

- (لاجم عہ۱ + ماجب عہ۱ - ع۱) اور - (لاجم عہ۲ + ماجم عہ۲ - ع۲)

میں مبداء کے محدّد درج کرنے سے ملینگے۔

پس ن ن۱ پر کے نقطہ (لاَ، مَا) سے عمود انہی جملوں میں محدّد درج کرنے سے حاصل ہونگے۔ پس مبداء والے حصّہ میں سے گزرنے والے مُنصِّف کی مساوات

لاجم عہ۱ + ماجب عہ۱ - ع۱ = + (لاجم عہ۲ + ماجب عہ۲ - ع۲)

اور دوسرے مُنصِّف کی مساوات ہے

لاجم عہ۱ + ماجب عہ۱ - ع۱ = - (لاجم عہ۲ + ماجب عہ۲ - ع۲)

(ب) خطوں کی مساواتیں ا۱لا + ب۱ما + ج۱ = ۰ اور ا۲لا + ب۲ما + ج۲ = ۰ ہیں، ان کے درمیانی زاویوں کے مُنصِّفوں کی مساواتیں مطلوب ہیں۔

(محور علی القوائم)

خطوں کو عمودی شکل میں لکھ کر اُوپر کے استدلال کے بموجب مُنصِّفوں کی

مساواتیں ہیں:

$$\frac{ل_1 لا + ب_1 ما + ج_1}{\sqrt{ل_1^2 + ب_1^2}} = \pm \frac{ل_2 لا + ب_2 ما + ج_2}{\sqrt{ل_2^2 + ب_2^2}} \quad (ق)$$

جس علامت کو لینے سے دونوں جانب مستقل رقموں کی علامات وہی ہو جائیں اس کو اختیار کرنے سے، وہ منصّف حاصل ہوگا جو مبداء والے رُبع میں سے گزرتا ہے۔

مثال (۱) ۴لا + ۳ما + ۲ = ۰ اور ۵لا - ۱۲ما + ۱۳ = ۰ کے درمیانی زاویوں کے منصّفوں کی مساواتیں حاصل کرو اور بتاؤ کہ کونسا منصّف مبداء والے حصّہ میں سے گزرتا ہے۔

منصّف ہیں $\frac{۴لا + ۳ما + ۲}{۵} = \pm \frac{۵لا - ۱۲ما + ۱۳}{۱۳}$

یا ۱۳(۴لا + ۳ما + ۲) = ± ۵(۵لا - ۱۲ما + ۱۳)

مبداء والے حصّہ میں سے گزرنے والا منصّف ہے

۱۳(۴لا + ۳ما + ۲) = + ۵(۵لا - ۱۲ما + ۱۳)

یعنی ۲۷لا + ۹۹ما - ۳۹ = ۰

دُوسرا منصّف ۱۳(۴لا + ۳ما + ۲) = - ۵(۵لا - ۱۲ما + ۱۳) = ۰

یا ۷۷لا - ۲۱ما + ۹۱ = ۰

یہ دونوں علی القوائم ہیں ۲۷ × ۷۷ + ۹۹ × (-۲۱) = ۲۰۷۹ - ۲۰۷۹ = ۰

مشق ۸

(۱) ذیل کی صورتوں میں خطوطِ مستقیم کی مساواتیں معلوم کرو:-

دو خطوں ۴لا - ۳ما + ۱۲ = ۰ اور لا + ما - ۱۰ = ۰ کے نقطۂ تقاطع میں سے خط گزرتا ہے اور (ا) محور لا کے متوازی ہے (ب) محور ما کے متوازی ہے

(ج) مبداء میں سے گزرتا ہے (د) نقطہ (۳، ۱) میں سے گزرتا ہے
(ع) خط ۲ لا + ۳ ما + ۱۱ = ۰ کے متوازی ہے (ف) خط ۲ لا + ۴ ما + ۷ = ۰
پر علی القوائم ہے۔

جواب۔ (ا) ما = ۵۲/۷ (ب) لا = ۱۸/۷ (ج) ۲۶ لا − ۹ ما = ۰.
(د) ۳ لا − ۱۰ ما − ۸۲ = ۰. (ع) ۱۴ لا + ۲۱ ما − ۱۸۰ = ۰.
(ف) ۱۴ لا − ۷ ما + ۱۶ = ۰.

(۲) تین خطوط لا + ۸ ما + ۱۱ = ۰، ۵ لا + ما − ۲۳ = ۰، ۴ لا − ۷ ما + ۵ = ۰ سے جو مثلث بنتا ہے اس کے (ا) راسوں کے محدّد معلوم کرو (ب) مثلث کے زاویے معلوم کرو (ج) مثلث کے راسوں میں سے مقابل کے اضلاع کے متوازی خطوں کی مساواتیں دریافت کرو۔ (د) مثلث کے راسوں سے مقابل کے اضلاع پر جو عمود کھنچ سکتے ہیں اُن کی مساواتیں حاصل کرو۔ اور ثابت کرو کہ وہ ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں (ع) مثلث کے مُنصِفوں کی مساواتیں حاصل کرو اور ثابت کرو کہ وہ ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔

جواب۔ (ا) محدّد ہیں (۴، ۳)، (−۳، −۱)، (۵، −۲)
" (ب) ۷۱° ۳۴'، ۳۶° ۵۳'، ۷۱° ۳۴' تقریباً
" (ج) لا + ۸ ما − ۲۸ = ۰، ۵ لا + ما + ۱۶ = ۰، ۴ لا − ۷ ما − ۳۴ = ۰.
" (د) راسوں سے عمودوں کی مساواتیں ۸ لا − ما − ۲۹ = ۰،
لا − ۵ ما − ۲ = ۰، ۷ لا + ۴ ما − ۲۷ = ۰.
(۸ لا − ما − ۲۹) − (لا − ۵ ما − ۲) − (۷ لا + ۴ ما − ۲۷) = ۰
" (ع) مثلث کے اندر مبداء ہے، مبداء والے حصّہ میں سے گزرنے والے مُنصِف ہیں

(لا + ۸ ما + ۱۱)/√۶۵ = (۴ لا − ۷ ما + ۵)/√۶۵، (۴ لا − ۷ ما + ۵)/√۶۵ = (۵ لا + ما − ۲۳)/√۲۶

اور (۵ لا + ما − ۲۳)/√۲۶ = − (لا + ۸ ما + ۱۱)/√۶۵، سب کو ایک طرف

لے جا کر جمع کرنے سے متماثلاً صفر۔

(۳) ایک مثلث کے رأس (لا۱، ما۱)، (لا۲، ما۲)، (لا۳، ما۳) ہیں (ا) اس کے زاویوں کی قیمتیں دریافت کرو (ب) اس کے وسطانیوں کی مساواتیں دریافت کرو اور ثابت کرو کہ وہ ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں (ج) اس کے رأسوں سے مقابل کے اضلاع پر عمودوں کی مساواتیں دریافت کرو اور ثابت کرو کہ وہ ایک نقطہ میں سے گزرتے ہیں (د) اس کے منصّفوں کی مساواتیں دریافت کرو اور ثابت کرو کہ وہ ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔

(۴) ذیل کی صورتوں میں خطوں کی مساواتیں لکھو (ا) (۳، -۱) میں سے خط گزرتا ہے اور ۳ لا - ۷ ما - ۱۱ = ۰ پر علی القوائم ہے۔ (۲) (۰، -۱) میں سے خط گزرتا ہے اور ۵ لا + ۲ ما + ۷ = ۰ پر علی القوائم ہے۔ (۳) خط (-۲، -۳) میں سے گزرتا ہے اور ۲ لا + ۳ ما + ۴ = ۰ پر علی القوائم ہے۔

جواب (ا) ۷ لا + ۳ ما - ۱۸ = ۰ . (ب) ۲ لا - ۵ ما - ۵ = ۰ .

(ج) ۳ لا - ۲ ما = ۰ .

(۵) مبدا سے خطوں ۲ لا - ۳ ما + ۱۱ = ۰ اور ۳ لا + ۴ ما - ۵ = ۰ پر عمود کھینچے گئے ہیں، جہاں پر یہ خطوں سے ملتے ہیں ان نقطوں کے محدد دریافت کرو اور ان نقطوں کو ملانے والے خط کی مساوات دریافت کرو۔

جواب (- ۲/۱۳ ، ۳/۱۳)، (۳/۵ ، ۴/۵)، ۴۸۱ لا - ۹۳۷ ما + ۲۲۱ = ۰

(۶) ان خطوں کی مساواتیں معلوم کرو جو بالترتیب نقاط (۱، ۲) اور (-۳، -۲) میں سے گزرتے ہیں اور خط ۳ لا + ۴ ما - ۷ = ۰ کے متوازی ہیں، ان خطوں کے درمیان عمودی فاصلہ دریافت کرو۔

جواب ۳ لا + ۴ ما - ۱۱ = ۰ ، ۳ لا + ۴ ما + ۱۷ = ۰ ، ۲۸/۵

(۷) اُس مستطیل کے قطروں کی مساواتیں معلوم کرو جو ذیل کے خطوط سے بنتا ہے لا + ۲ ما - ۸ = ۰ ، لا + ۲ ما - ۱۴ = ۰ ، ۲ لا - ما + ۳ = ۰ ، ۲ لا - ما - ۵ = ۰

اور ان کا نقطۂ تقاطع دریافت کرو۔

(جواب) قطروں کی مساواتیں ۲ لا - ۱۱ ما + ۴۱ = ۰، ۱۰ لا + ۵ ما - ۴۷ = ۰

اور ان کا نقطۂ تقاطع ($\frac{۱۳}{۵}$، $\frac{۲۱}{۵}$)

۲۵ء۵ - لا، ما میں متجانس مساوات - ہم جانتے ہیں کہ ما - م لا = ۰، ۲ لا + ۳ ما = ۰، ا لا + ب ما = ۰ مبداء میں سے گزرنے والے خطوں کی مساواتیں ہیں جن کے ڈھال بالترتیب م، - $\frac{۲}{۳}$، - $\frac{ا}{ب}$ ہیں۔ ایسی دو یا زیادہ مساواتوں کے رُکنوں کو باہم ضرب دینے سے متجانس مساواتیں پیدا ہوتی ہیں، مثلاً

(ما - م$_۱$ لا) (ما - م$_۲$ لا) = ما^۲ - (م$_۱$ + م$_۲$) لا ما + م$_۱$ م$_۲$ لا^۲ = ۰

(۲ لا + ۳ ما) (۳ لا - ما^۲) (لا + ۴ ما) = ۶ لا^۳ + ۳۱ لا^۲ ما + ۲۵ لا ما^۲ - ۱۲ ما^۳ = ۰

اسی طرح مبداء میں سے گزرنے والے ن خطوں کی مساواتوں کے رُکنوں کو ضرب دینے سے لا، ما میں ن ویں درجہ کی متجانس مساوات پیدا ہوگی۔ برعکس اس کے ہم ثابت کرسکتے ہیں کہ لا، ما میں دوسرے، تیسرے ..... ن ویں درجہ کی متجانس مساوات بالترتیب مبداء میں سے گزرنے والے دو، تین ..... ن خطوں کو تعبیر کریگی اور ان خطوں کی مساواتیں مساواتوں کے اجزائے ضربی کو الگ الگ صفر کے مساوی رکھنے سے حاصل ہونگی۔ مثلاً دوسرے رُتبہ کی مساوات ہے۔

ا لا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ = ۰ .... (ا)

لا^۲ پر تقسیم کرنے اور ب کو مشترک نکالنے سے ب{($\frac{ما}{لا}$)^۲ + $\frac{۲ھ}{ب}$ ($\frac{ما}{لا}$) + $\frac{ا}{ب}$} = ۰

جس سے $\frac{ما}{لا}$ = $\frac{-\frac{۲ھ}{ب} \pm \sqrt{\frac{۴ھ^۲}{ب^۲} - \frac{۴ا}{ب}}}{۲}$ = $\frac{-ھ \pm \sqrt{ھ^۲ - اب}}{ب}$

یعنی ما - $\frac{-ھ + \sqrt{ھ^۲ - اب}}{ب}$ لا = ۰

اور ما - $\frac{-ھ - \sqrt{ھ^۲ - اب}}{ب}$ لا = ۰

جو مبداء میں سے گزرنے والے دو خطوں کی مساواتیں ہیں، متجانس مساوات درجۂ دوم (ا) کا طریق، یہ خطوطِ مستقیم ہیں یعنی مساوات (ا) کے تمام حل،

(لا، ما میں) مرتسم ہونے پر ان خطوں پر واقع ہوتے ہیں اور ان خطوں پر کے سب نقطوں کے محدّد مساوات (ا) کو پورا کرتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ یہ خط حقیقی ہونگے اگر ھ^{2} > ا ب، منطبق ہونگے اگر ھ^{2} = ا ب اور خیالی ہونگے اگر ھ^{2} < ا ب۔

یاد رہے کہ ھ، لا ما والی رقم کا سر نہیں ہے بلکہ نصف سر ہے۔

مثال (۱) (ا) مساوات $6\,\text{لا}^{2} - \text{لا}\,\text{ما} - 35\,\text{ما}^{2} = 0$۔

یعنی $(3\,\text{لا} + 7\,\text{ما})\,(2\,\text{لا} - 5\,\text{ما}) = 0$۔ دو خطوطِ مستقیم $3\,\text{لا} + 7\,\text{ما} = 0$ اور $2\,\text{لا} - 5\,\text{ما} = 0$ کو تعبیر کرتی ہے۔ جو حقیقی اور مختلف ہیں۔

(ب) $2\,\text{لا}^{2} + 6\,\text{لا}\,\text{ما} + 3\,\text{ما}^{2} = 0$۔

$$3\left(\text{ما}^{2} + 2\,\text{لا}\,\text{ما} + \tfrac{2}{3}\,\text{لا}^{2}\right) = 0، \quad \frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - \frac{8}{3}}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{\frac{4}{3}}}{2} = -1 \pm \sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

پس $3\left(\text{ما}^{2} + 2\,\text{لا}\,\text{ما} + \tfrac{2}{3}\,\text{لا}^{2}\right) = 3\left[\text{ما} - \left(-1 + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)\text{لا}\right]\left[\text{ما} - \left(-1 - \sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)\text{لا}\right] = 0$

جس سے خطوں کی الگ الگ مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔

(ج) $3\,\text{لا}^{2} + 2\,\text{لا}\,\text{ما} + 5\,\text{ما}^{2} = 0$۔

یا $5\left(\text{ما}^{2} + \tfrac{2}{5}\,\text{لا}\,\text{ما} + \tfrac{3}{5}\,\text{لا}^{2}\right) = 0$۔

$$\frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \frac{-\frac{2}{5} \pm \sqrt{\frac{4}{25} - \frac{12}{5}}}{2} = \frac{-\frac{2}{5} \pm \sqrt{\frac{-56}{5}}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-14}}{5}$$

پس $5\left(\text{ما}^{2} + \tfrac{2}{5}\,\text{لا}\,\text{ما} + \tfrac{3}{5}\,\text{لا}^{2}\right) = 5\left(\text{ما} - \frac{-1 + \sqrt{-14}}{5}\,\text{لا}\right)\left(\text{ما} - \frac{-1 - \sqrt{-14}}{5}\,\text{لا}\right)$

خطوں کی الگ الگ مساواتیں حاصل ہوتی ہیں خط خیالی ہیں۔

مثال (۲) ذیل کی مساواتوں کو خطی مساواتوں میں تحلیل کرو:-

(ا) $2\,\text{لا}^{2} + 7\,\text{لا}\,\text{ما} - 15\,\text{ما}^{2} = 0$۔

(ب) $\text{لا}^{2} - 5\,\text{لا}\,\text{ما} + 2\,\text{ما}^{2} = 0$۔

(ج) $2\,\text{لا}^{2} - 3\,\text{لا}\,\text{ما} + 5\,\text{ما}^{2} = 0$۔

جواب (ا) $(\text{۲لا} - \text{۳ما})(\text{لا} + \text{۵ما}) = ۰$

(ب) $۲\left(\text{ما} - \frac{۵+\sqrt{۱۷}}{۴}\text{لا}\right)\left(\text{ما} - \frac{۵-\sqrt{۱۷}}{۴}\text{لا}\right) = ۰$

(ج) $۵\left(\text{ما} - \frac{۳+\sqrt{۳۱-}}{۱۰}\text{لا}\right)\left(\text{ما} - \frac{۳-\sqrt{۳۱-}}{۱۰}\text{لا}\right) = ۰$

۱۵۱،۲ - مساوات $\text{ا}\,\text{لا}^۲ + ۲\text{ھ}\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ب}\,\text{ما}^۲ = ۰$ سے جو دو مبداء میں سے گزرنے والے خط تعبیر ہوتے ہیں اُن کے درمیان زاویہ دریافت کرو۔ محور علی القوائم ہیں۔

فرض کرو کہ مساوات سے جو خط تعبیر ہوتے ہیں وہ $\text{ما} - \text{م}_۱\text{لا} = ۰$، $\text{ما} - \text{م}_۲\text{لا} = ۰$ ہیں۔

تب $\text{ب}\left(\text{ما}^۲ + \frac{۲\text{ھ}}{\text{ب}}\text{لا}\,\text{ما} + \frac{\text{ا}}{\text{ب}}\text{لا}^۲\right) = \text{ب}(\text{ما} - \text{م}_۱\text{لا})(\text{ما} - \text{م}_۲\text{لا})$

جس سے $\text{م}_۱ + \text{م}_۲ = -\frac{۲\text{ھ}}{\text{ب}}$ ، $\text{م}_۱\text{م}_۲ = \frac{\text{ا}}{\text{ب}}$

$$\text{م}_۱ - \text{م}_۲ = \pm\sqrt{\frac{۴\text{ھ}^۲}{\text{ب}^۲} - \frac{۴\text{ا}}{\text{ب}}} = \pm\frac{۲\sqrt{\text{ھ}^۲ - \text{اب}}}{\text{ب}}$$

اگر خطوں کے درمیان زاویہ فہ ہو تو

$$\text{مس فہ} = \frac{\text{م}_۱ - \text{م}_۲}{۱ + \text{م}_۱\text{م}_۲} = \frac{\pm ۲\sqrt{\text{ھ}^۲ - \text{اب}}\,/\,\text{ب}}{۱ + \frac{\text{ا}}{\text{ب}}} = \frac{\pm ۲\sqrt{\text{ھ}^۲ - \text{اب}}}{\text{ا} + \text{ب}}$$

$$\text{مس فہ} = \frac{\pm ۲\sqrt{\text{ھ}^۲ - \text{اب}}}{\text{ا} + \text{ب}} \quad \text{............(ا)}$$

دوہری علامت اس بات کو ظاہر کرتی ہے کہ خطوں کے درمیان زاویہ فہ یا اس کا مکمل لیا جا سکتا ہے۔

خط منطبق ہوں گے اگر $\text{ھ}^۲ = \text{اب}$ یعنی جملہ $\text{ا}\,\text{لا}^۲ + ۲\text{ھ}\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ب}\,\text{ما}^۲$ مربع کامل ہو۔

خط علی القوائم ہونگے اگر ا + ب = ۰

مثال ـ لا^۲ ـ ۳ لاما + ما^۲ = ۰، مبداء میں سے گزرنے والے دو خط ہیں جن کے درمیان زاویہ فہ اس طرح ملتا ہے

$$\text{مس فہ} = \frac{۲\sqrt{ھ^۲ - ا ب}}{ا + ب} = \frac{۲\sqrt{(-\frac{۳}{۲})^۲ - ۱}}{۱ + ۱} = \frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

$$= \frac{۲٫۲۳۶}{۲} = ۱٫۱۱۸ \text{، فہ} = ۴۸^\circ\ ۱۲' \text{ تقریباً}$$

لا^۲ ـ ۳ لاما ـ ما^۲ = ۰ خط علی القوائم ہیں ـ

لا^۲ + ۲ لاما + ما^۲ = ۰ ھ^۲ ـ ا ب = ۱ ـ ۱ = ۰؛ خط منطبق ہیں۔

ہم دیکھتے ہیں کہ وایاں رکن مربع کامل ہے (لا + ما)^۲ = ۰ ـ لا + ما = ۰ دو مرتبہ

مثال (۲)۔ (۱) خطوط ۲ لا^۲ ـ ۳ لاما + ما^۲ = ۰ کے درمیان زاویہ دریافت کرو۔

(۲) 〃 لا^۲ + ۴ لاما + ۲ ما^۲ = ۰ 〃 〃 〃

(۳) 〃 لا^۲ + ۵ لاما ـ ۶ ما^۲ = ۰ 〃 〃 〃

(۴) 〃 لا^۲ ـ لاما ـ ۶ ما^۲ = ۰ 〃 〃 〃

جواب (۱) مس^{-۱} $\frac{۱}{۳}$ (۲) مس^{-۱} $\frac{۱}{۲}$ (۳) مس^{-۱} $\frac{۷}{۵}$ (۴) ۴۵°

۲٫۵۴ ـ خطوں کے جوڑے ا لا^۲ + ۲ ھ لاما + ب ما^۲ = ۰ کے درمیانی زاویوں کے منصّفوں کی مساوات دریافت کرو ـ محور علی القوائم ہیں۔

دی ہوئی مساوات ا لا^۲ + ۲ ھ لاما + ب ما^۲ = ۰، مبداء میں سے گزرنے والے دو خطوں کو تعبیر کرتی ہے، فرض کرو کہ یہ خط ما ـ م₁ لا = ۰ اور ما ـ م₂ لا = ۰ ہیں ـ ان خطوں کے درمیان کے دو زاویوں کے دو منصّف ہونگے کسی منصّف پر کے کسی نقطہ (لا، ما) سے اگر خطوں پر عمود کھینچے جائیں تو ان کے طول مساوی ہونگے پس

$$\frac{ما - م_۱ لا}{\sqrt{۱ + م_۱^۲}} = \pm \frac{ما - م_۲ لا}{\sqrt{۱ + م_۲^۲}}$$

جہاں دو علامتوں کے مماثل، دو مُنصّف ہیں ۔ مشترک مساوات حاصل کرنے کے لیے دونوں مساواتوں کو باہم ضرب دینے سے

$$(1+\text{م}_2^2)(\text{ما}-\text{م}_1\text{لا})^2-(1+\text{م}_1^2)(\text{ما}-\text{م}_2\text{لا})^2=0$$

جس سے

$$\text{لا}^2\{\text{م}_1^2(1+\text{م}_2^2)-\text{م}_2^2(1+\text{م}_1^2)\}-2\,\text{لا}\,\text{ما}\{\text{م}_1(1+\text{م}_2^2)-\text{م}_2(1+\text{م}_1^2)\}+\text{ما}^2\{(1+\text{م}_2^2)-(1+\text{م}_1^2)\}=0$$

یا

$$\text{لا}^2(\text{م}_1^2-\text{م}_2^2)-2\,\text{لا}\,\text{ما}\{(\text{م}_1-\text{م}_2)(1-\text{م}_1\text{م}_2)\}+\text{ما}^2(\text{م}_2^2-\text{م}_1^2)=0$$

یا

$$(\text{لا}^2-\text{ما}^2)(\text{م}_1+\text{م}_2)=2\,\text{لا}\,\text{ما}(1-\text{م}_1\text{م}_2)\quad(1)$$

کیونکہ $\text{م}_1-\text{م}_2\neq 0$

اب

$$\text{ما}^2+\frac{2\text{ھ}}{\text{ب}}\text{لا}\,\text{ما}+\frac{\text{ا}}{\text{ب}}\text{لا}^2=(\text{ما}-\text{م}_1\text{لا})(\text{ما}-\text{م}_2\text{لا})$$

جس سے $\text{م}_1+\text{م}_2=-\frac{2\text{ھ}}{\text{ب}}$ ، $\text{م}_1\text{م}_2=\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ ، پس یہ قیمتیں درج کرنے سے مُنصّفوں کی مساوات ہو جاتی ہے؛

$$(\text{لا}^2-\text{ما}^2)\left(-\frac{2\text{ھ}}{\text{ب}}\right)=2\,\text{لا}\,\text{ما}\left(1-\frac{\text{ا}}{\text{ب}}\right)$$

یعنی

$$(\text{لا}^2-\text{ما}^2)\text{ھ}=\text{لا}\,\text{ما}(\text{ا}-\text{ب})$$

پس مُنصّفوں کی مساوات ہے

$$\frac{\text{لا}^2-\text{ما}^2}{\text{ا}-\text{ب}}=\frac{\text{لا}\,\text{ما}}{\text{ھ}}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

مثال (۱) خطوط $5\text{لا}^2-2\,\text{لا}\,\text{ما}+3\text{ما}^2=0$ کے درمیان کے زاویوں کے مُنصّفوں کی مساوات دریافت کرو، اور محصلہ مساوات سے ثابت کرو کہ یہ علی القوائم ہیں۔

مُنصّفوں کی مساوات ہے

$$\frac{\text{لا}^2-\text{ما}^2}{5-3}=\frac{\text{لا}\,\text{ما}}{-1}$$

یعنی لا^2 + ۲ لاما − ما^2 = ۰

ظاہر ہے کہ ا + ب = ۱ − ۱ = ۰. یعنی مُنصّف علی القوائم ہیں۔

مثال (۲) ذیل کے خطوں کے درمیانی زاویوں کے مُنصّفوں کی مساواتیں لکھو۔ اور دکھاؤ کہ وہ علی القوائم ہیں۔

(ا) ۷ لا^2 − ۲ لاما + ۵ ما^2 = ۰

(ب) ۳ لا^2 + لاما − ۲ ما^2 = ۰

(ج) ۱۱ لا^2 + ۵ لاما + ۷ ما^2 = ۰

(د) ۲ لا^2 − ۳ لاما + ۳ ما^2 = ۰

جواب (ا) لا^2 − ۲ لاما − ما^2 = ۰

(ب) لا^2 − ۱۰ لاما − ما^2 = ۰

(ج) ۵ لا^2 − ۸ لاما − ۵ ما^2 = ۰

(د) ۳ لا^2 − ۲ لاما − ۳ ما^2 = ۰

۲۷۶۔ جن نقطوں پر خط ل لا + م ما + ن = ۰، منحنی

ا لا^2 + ۲ ھ لاما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ کو کاٹتا ہے

اُن کو مبداء سے ملانے والے خطوں کی مساوات دریافت کرو۔

مبداء میں سے گزرنے والے خطوں کی مساوات متجانس ہوگی اور نقاطِ تقاطع کے لیے دونوں مساواتیں ایک ساتھ پوری ہونا چاہییں؛ اس لیے خطِ مستقیم کی مساوات کی مدد سے، منحنی کی مساوات کو ہم متجانس بناتے ہیں

ا لا^2 + ۲ ھ لاما + ب ما^2 + (۲ گ لا + ۲ ف ما) (− (ل لا + م ما) / ن) + ج (− (ل لا + م ما) / ن)^2 = ۰ .... (ا)

کیونکہ خطِ مستقیم کی مساوات سے − (ل لا + م ما) / ن = ۱

مساوات (ا)، لا، ما میں دوسرے درجہ کی متجانس مساوات ہے اس لیے یہ مبداء میں سے گزرنے والے دو خطوں کو تعبیر کرتی ہے۔ نیز اگر خط اور منحنی کا

نقطۂ تقاطع (لا، ما) ہو تو وہ (ل) کو پورا کرتا ہے کیونکہ وہ الگ الگ خطِ مستقیم اور منحنی کی مساواتوں کو پورا کرتا ہے۔ پس (ل) مطلوبہ مساوات ہے۔

مثال (۱) خط ۲لا + ۳ما + ۱ = ۰، منحنی لا² + ۳لاما + ما² + ۲لا + ۵ما + ۱ = ۰ سے جن نقاط پر ملتا ہے ان کو مبداء سے ملانے والے خطوط کی مساوات دریافت کرو اور ان خطوط کا درمیانی زاویہ دریافت کرو۔

خط کی مساوات ۔(۲لا + ۳ما) = ۱ کی مدد سے منحنی کی مساوات کو متجانس بنانے سے

لا² + ۳لاما + ما² ۔ (۲لا + ۳ما) (۲لا + ۵ما) + (۲لا + ۳ما)² = ۰

یعنی لا² ۔ لاما ۔ ۵ما² = ۰ جو مبداء کو نقاطِ تقاطع سے ملانے والے خط ہیں۔

ان کا درمیانی زاویہ اگر فہ ہو تو مس فہ = ± ۲√((-½)² + ۵) / (۱ - ۵) = ± √۲۱ / ۴

= ۴٫۵۸۳ / ۴ = ۱٫۱۴۵

جس سے فہ = ۴۸° ۵۴' (تقریباً)۔

مثال (۲) ذیل کے خطوطِ مستقیم اور منحنیات کے نقاطِ تقاطع کو مبداء سے ملانے والے خطوط کی مساوات دریافت کرو، اور خطوں کے درمیان کا زاویہ دریافت کرو۔

(ل) خط لا + ما ۔ ۲ = ۰، منحنی ۲لا² + ۳لاما + ما² = ۵

(ب) خط لا + ۲ما + ۱ = ۰، منحنی ۲لا² ۔ ۱۰لاما ۔ ۳۶ما² + ۲لا ۔ ۵ما + ۳ = ۰

(ج) خط لا + ما + ۱ = ۰، منحنی ۶لا² ۔ ۲۱لاما ۔ ۲ما² + ۲لا ۔ ما + ۵ = ۰

(د) خط ۲لا + ۳ما ۔ ۵ = ۰، دائرہ لا² + ما² + ۲لا + ۳ما ۔ ۱۰ = ۰

جواب (ل) ۳لا² + ۲لاما ۔ ما² = (۳لا ۔ ما) (لا + ما) = ۰

زاویہ مس⁻¹ ۲

(ب) ۳لا² + لاما ۔ ۱۴ما² = (۳لا + ۷ما) (لا ۔ ۲ما)

زاویہ مس⁻¹ ۱۳/۱۱

(ج) ۹لا² ۔ ۱۲لاما + ۴ما² = (۳لا ۔ ۲ما)²

خط منطبق۔

(د) خط لا^۲ - ۱۲ لا ما - ۴ ما^۲ = ۰ ؛ زاویہ مس^-۱ (۱۰√۲ / ۳)

۲۶۷ - (ل) اس کے لیے شرط دریافت کرو کہ لا، ما میں درجۂ دوم کی عام مساوات ا لا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ (ا)

دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرے۔

فرض کرو کہ یہ مساوات (ا) دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے اس صورت میں دائیں جانب کا جملہ دو خطی جملوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوگا یعنی ا لا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج ≡ (ل لا + م ما + ن) (لَ لا + مَ ما + نَ) = ۰

اگر پہلا جملہ، دوسرے کے مطابقاً مساوی ہو جسے علامت ≡ سے تعبیر کیا گیا ہے تو

ا = ل لَ ، ب = م مَ ، ج = ن نَ ،

۲ ف = م نَ + مَ ن ، ۲ گ = ن لَ + نَ ل ، ۲ ھ = ل مَ + لَ م

آخری تین کو ضرب دینے سے

۸ ف گ ھ = (م نَ + مَ ن) (ن لَ + نَ ل) (ل مَ + لَ م)

= (م نَ + مَ ن) (ن لَ ل مَ + ن لَ^۲ م + نَ ل^۲ مَ + نَ ل لَ م)

= ۲ ل م ن لَ مَ نَ + ل لَ (م^۲ نَ^۲ + مَ^۲ ن^۲) + م مَ (ن^۲ لَ^۲ + نَ^۲ ل^۲)

+ ن نَ (ل^۲ مَ^۲ + لَ^۲ م^۲)

= ۲ ا ب ج + ا (۴ ف^۲ - ۲ ب ج) + ب (۴ گ^۲ - ۲ ج ا)
+ ج (۴ ھ^۲ - ۲ ا ب)

= + ۴ (ا ف^۲ + ب گ^۲ + ج ھ^۲ - ا ب ج)

پس مطلوبہ شرط ہے ا ب ج + ۲ ف گ ھ - ا ف^۲ - ب گ^۲ - ج ھ^۲ = ۰ (ب)

اس شرط کو مقطعہ کی شکل میں بھی رکھا جا سکتا ہے

ل	ھ	گ
ھ	ب	ف
گ	ف	ج

= ۰ .... (ب۲)

پس ہم نے یہ ضروری نتیجہ حاصل کیا کہ دو مجہول مقداروں لا، ما میں درجۂ دوم کی عام سے عام مساوات دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کریگی اگر مساوات کے مستقل سِعتوں ل، ب، ج، ف، گ، ھ میں رشتہ (ب۲) پایا جائے۔

مثال۔ ثابت کرو کہ مساوات ۶لا² + ۱۱لا ما − ۱۰ما² − ۴لا + ۹ما − ۲ = ۰ دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے، ان خطوں کی مساواتیں حاصل کرو اور ان کے درمیان زاویہ دریافت کرو۔

قیمتیں درج کرنے سے　　　ل ب ج + ۲ف گ ھ − ل ف² − ب گ² − ج ھ²

= (۶)(−۱۰)(−۲) + ۲(۹/۲)(−۲)(۱۱/۲) − (۶)(۹/۲)² − (−۱۰)(−۲)²

− (−۲)(۱۱/۲)²

= ۱۲۰ − ۹۹ − ۲۴۳/۲ + ۴۰ + ۱۲۱/۲

= ۲۲۰ ½ − ۲۲۰ ½ = ۰

شرط پوری ہوتی ہے یعنی درجۂ دوم کی اوپر کی مساوات دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔ درجۂ دوم کی رقموں کے اجزائے ضربی (۲لا + ۵ما) (۳لا − ۲ما) ہیں اور آزمائش سے پوری مساوات کے دائیں رکن کے اجزائے ضربی ہیں

(۲لا + ۵ما − ۲) (۳لا − ۲ما + ۱)

پس خطوں کی جداگانہ مساواتیں یہ ہیں:

۲لا + ۵ما − ۲ = ۰　اور

۳لا − ۲ما + ۱ = ۰

ان کے درمیان زاویہ مس فہ = $\frac{(-\frac{۲}{۵}) - \frac{۳}{۲}}{۱ + (-\frac{۲}{۵})(\frac{۳}{۲})} = \frac{۱۹}{۴}$ ، فہ = مس$^{-۱}$ $(\frac{۱۹}{۴})$

(ب) یہی شرط، مساوات بالا کو لا یا ما میں، بطور مساوات درجۂ دوم کے حل کرنے سے بہ آسانی حاصل ہو سکتی ہے بشرطیکہ لا^{۲} اور ما^{۲} دونوں کے سر صفر نہ ہوں۔

فرض کرو کہ ا صفر نہیں ہے اور مساوات کو لا کی رقوم میں ترتیب دینے سے

$$\text{ا لا}^{۲} + ۲\,\text{لا}\,(\text{ھ ما} + \text{گ}) + \text{ب ما}^{۲} + ۲\,\text{ف ما} + \text{ج} = ۰$$

جسے لا میں حل کرنے سے

$$\text{لا} = \frac{-۲(\text{ھ ما} + \text{گ}) \pm \sqrt{۴(\text{ھ ما} + \text{گ})^{۲} - ۴\,\text{ا}\,(\text{ب ما}^{۲} + ۲\,\text{ف ما} + \text{ج})}}{۲\,\text{ا}}$$

یعنی $\text{ا لا} + \text{ھ ما} + \text{گ} = \pm\sqrt{(\text{ھ ما} + \text{گ})^{۲} - \text{ا}\,(\text{ب ما}^{۲} + ۲\,\text{ف ما} + \text{ج})}$

منطق اجزائے ضربی ہونے کے لیے ضروری ہے کہ جذر کے اندر کی رقم مربع کامل ہو

یعنی $(\text{ھ ما} + \text{گ})^{۲} - \text{ا}\,(\text{ب ما}^{۲} + ۲\,\text{ف ما} + \text{ج})$ مربع کامل ہو

یعنی $\text{ما}^{۲}(\text{ھ}^{۲} - \text{ا ب}) + ۲\,\text{ما}\,(\text{ھ گ} - \text{ا ف}) + \text{گ}^{۲} - \text{ا ج}$ مربع کامل ہو

جس کے لیے شرط ہے $۴(\text{ھ گ} - \text{ا ف})^{۲} - ۴(\text{ھ}^{۲} - \text{ا ب})(\text{گ}^{۲} - \text{ا ج}) = ۰$

یعنی $-۲\,\text{ھ گ ا ف} + \text{ا}^{۲}\text{ف}^{۲} + \text{ا ج ھ}^{۲} + \text{ا ب گ}^{۲} - \text{ا}^{۲}\text{ب ج} = ۰$

یعنی $\text{ا ب ج} + ۲\,\text{ف گ ھ} - \text{ا ف}^{۲} - \text{ب گ}^{۲} - \text{ج ھ}^{۲} = ۰$

وہی شرط جو پہلے حاصل کی گئی۔

مثال۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$۲\,\text{لا}^{۲} - \text{لا ما} - ۶\,\text{ما}^{۲} + ۷\,\text{لا} + ۷\,\text{ما} + ۳ = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots (\text{ب}_{۱})$$

دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے ۔ ان خطوں کی جداگانہ مساواتیں حاصل کرو اور ثابت کرو کہ (ب ۱) سے جو خط حاصل ہوتے ہیں وہ اُن خطوں کے متوازی ہیں جو صرف درجۂ دوم کی رقموں $\text{۲لا}^{۲} - \text{لاما} - \text{۶ما}^{۲} = ۰$ کو لینے سے حاصل ہوتے ہیں جو مبداء میں سے گزرنے والے دو خط ہیں پس خطوں کے جوڑے (ب ۱) کے درمیان کا زاویہ $\text{۲لا}^{۲} - \text{لاما} - \text{۶ما}^{۲} = ۰$ کے درمیان کے زاویے کے مساوی ہے۔

مساوات کو لا کے لحاظ سے ترتیب دینے سے

$$\text{۲لا}^{۲} - \text{لا}(\text{ما} - ۷) - \text{۶ما}^{۲} + \text{۷ما} + ۳ = ۰$$

$$\text{لا} = \frac{\pm(\text{ما} - ۷) \pm \sqrt{(\text{ما} - ۷)^{۲} - ۴ \times ۲\,(-\text{۶ما}^{۲} + \text{۷ما} + ۳)}}{۴}$$

جذر کے اندر کا جملہ ہے $\text{۴۹ما}^{۲} - \text{۷۰ما} + ۲۵ = (\text{۷ما} - ۵)^{۲}$ جو مربع کامل ہے خطوں کی جداگانہ مساواتیں حاصل ہوتی ہیں

$$(\text{۲لا} + \text{۳ما} + ۱)(\text{لا} - \text{۲ما} + ۳) = ۰$$

یعنی $\text{۲لا} + \text{۳ما} + ۱ = ۰$ اور $\text{لا} - \text{۲ما} + ۳ = ۰$ جو مبداء میں سے گزرنے والے خطوط $\text{۲لا} + \text{۳ما} = ۰$ اور $\text{لا} - \text{۲ما} = ۰$ کے بالترتیب متوازی ہیں اور $(\text{۲لا} + \text{۳ما})(\text{لا} - \text{۲ما}) = \text{۲لا}^{۲} - \text{لاما} - \text{۶ما}^{۲}$ جو مساوات کی درجۂ دوم کی رقمیں ہیں۔ پس خطوں کے درمیان زاویہ وہی ہے جو خطوط $\text{۲لا}^{۲} - \text{لاما} - \text{۶ما}^{۲} = ۰$ کے درمیان ہے اور یہ زاویہ

$$\text{فہ} = \text{مس}^{-۱}\,\frac{۲\sqrt{(-\frac{۱}{۲})^{۲} + ۱۲}}{-۴} = \text{مس}^{-۱}\,\frac{۲\sqrt{\frac{۴۹}{۴}}}{-۴}$$

$= \text{مس}^{-۱}(-\frac{۷}{۴})$ پس زاویہ $\text{مس}^{-۱}\,\frac{۷}{۴}$ ہے یا اس کا مکمل۔

(ج) اسی عمل کو ایک اور طرح بھی دیکھا جا سکتا ہے، مبداء بدلنے کے عمل کی یہ اچھی مثال ہے۔

اگر $\text{و لا}^{۲} + \text{۲ھ لاما} + \text{ب ما}^{۲} + \text{۲گ لا} + \text{۲ف ما} + \text{ج} = ۰$

دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرے تو فرض کرو کہ ان کا نقطۂ تقاطع (لا، ما) ہے۔
اگر مبداء کو (لا، ما) پر لے جائیں اور محوروں کی سمتیں وہی رہیں تو دفعہ ۹۱
سے ہم جانتے ہیں کہ مساوات کو نئے مبداء اور محوروں کے لحاظ سے تبدیل
کرنے کے لیے ہمیں رکھنا چاہیے

لا = لا + لاَ (جہاں لاَ نیا فصلہ ہے)

اور ما = ما + ماَ (,, ماَ نیا معین ہے)

مساوات میں درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

ا (لاَ + لا)^۲ + ۲ھ (لاَ + لا)(ماَ + ما) + ب (ماَ + ما)^۲ + ۲گ (لاَ + لا)

+ ۲ف (ماَ + ما) + ج = ۰

یعنی ا لاَ^۲ + ۲ھ لاَ ماَ + ب ماَ^۲ + ۲ لاَ (ا لا + ھ ما + گ) + ۲ ماَ (ھ لا + ب ما + ف)

+ ا لا^۲ + ۲ھ لا ما + ب ما^۲ + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰ ...... (ط)

اب چونکہ نقطہ (لا، ما) مبداء ہے اس کے لحاظ سے خطوں کی مساوات
نئے محدّدوں لاَ، ماَ میں درجۂ دوم کی متجانس مساوات ہونا چاہیے، پس
لاَ، ماَ کے سر اور مستقل رقم سب صفر ہونا چاہییں، پس

ا لا + ھ ما + گ = ۰ (ا)

ھ لا + ب ما + ف = ۰ (ب)

اور ا لا^۲ + ۲ھ لا ما + ب ما^۲ + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰ (ج)

آخری مساوات (ج) کو یوں بھی لکھا جا سکتا ہے:

لا (ا لا + ھ ما + گ) + ما (ھ لا + ب ما + ف) + گ لا + ف ما + ج = ۰

جو (ا) اور (ب) کی مدد سے لکھی جا سکتی ہے۔

گ لا + ف ما + ج = ۰

پس (ا)، (ب)، (ج) سے لا، ما ساقط کرنے پر حاصل ہوتا ہے کہ

| ا ھ گ |
| ھ ب ف |
| گ ف ج | = ۰ یعنی پہلے کی طرح شرط حاصل ہوتی ہے۔

اب ج + ۲ف گ ھ − اف² − ب گ² − ج ھ² = ۰ (ب۱)

اور تحویل شدہ مساوات بلحاظ نئے مبداء کے ہوگی ا لاَ² + ۲ھ لاَ ماَ + ب ماَ² = ۰
یا اگر یہ ہمارے ذہن میں رہے کہ اب محدّد نئے ہیں تو اول سے ہی زبریں نکال دی جاسکتی ہیں۔ پس تحویل شدہ مساوات ہوگی ا لا² + ۲ھ لا ما + ب ما² = ۰
یعنی اصل مساوات کی درجۂ دوم کی رقمیں باقی رہتی ہیں مگر محدّد نئے ہیں

نیز واضح ہو کہ اگر درجۂ دوم کی عام سے عام مساوات دو خطوں کو تعبیر کرے تو ان کا نقطۂ تقاطع مساواتوں (ا) اور (ب) سے ملیگا

یعنی لا۱ = (ھ ف − ب گ)/(اب − ھ²) اور ما۱ = (گ ھ − اف)/(اب − ھ²) جو

محدود فاصلے پر ہوگا بشرطیکہ اب ≠ ھ²

مثال۔ مساوات ۲لا² + لا ما − ۶ما² + ۷لا + ۷ما + ۵ = ۰

دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے، ان کا نقطۂ تقاطع دریافت کرو اور تحویل شدہ مساوات کی شکل دریافت کرو۔

فرض کرو کہ نقطۂ تقاطع (لا۱، ما۱) ہے اس کو مبداء لینے اور محوروں کو متوازی رکھنے سے مساوات میں رکھو

لا = لا۱ + لا (یہ نیا فصلہ ہے، زبر حذف کر دیا گیا ہے)
اور ما = ما۱ + ما (یہ نیا معیّن ہے 〃 〃)
پس تبدیل شدہ مساوات ہو جاتی ہے:

۲(لا + لا۱)² + (لا + لا۱)(ما + ما۱) − ۶(ما + ما۱)² + ۷(لا + لا۱) + ۷(ما + ما۱) + ۵ = ۰

یعنی ۲ لاَ۲ + لا ما - ۶ ما۲ + لا (۴ لاٗ + ماٗ + ۷) + ما (لاٗ - ۱۲ ماٗ + ۷)

+ ۲ لاٗ۲ + لاٗ ماٗ - ۶ ماٗ۲ + ۷ لاٗ + ۷ ماٗ + ۵ = ۰ . . . . . (ط)

(لاٗ، ماٗ) مبداء ہے اور خطوں کا نقطۂ تقاطع ہے اس لیئے تبدیل شدہ مساوات (ط) درجۂ دوم کی متجانس مساوات ہونا چاہیے، اس لیے

۴ لاٗ + ماٗ + ۷ = ۰
لاٗ - ۱۲ ماٗ + ۷ = ۰
} جس سے لاٗ = - $\frac{۱۳}{۷}$، ماٗ = $\frac{۳}{۷}$ . . . . (ص)

منفصل رقم اس طرح لکھی جا سکتی ہے:

لاٗ (۲ لاٗ + $\frac{۱}{۲}$ ماٗ + $\frac{۷}{۲}$) + ماٗ ($\frac{۱}{۲}$ لاٗ - ۶ ماٗ + $\frac{۷}{۲}$)

+ $\frac{۷}{۲}$ لاٗ + $\frac{۷}{۲}$ ماٗ + ۵ = ۰

یعنی لاٗ (۴ لاٗ + ماٗ + ۷) + ماٗ (لاٗ - ۱۲ ماٗ + ۷) + ۷ لاٗ + ۷ ماٗ + ۱۰ = ۰
اب لاٗ اور ماٗ کے سر (ص) کی رُو سے صفر ہیں اور

۷ لاٗ + ۷ ماٗ + ۱۰ = ۷ (- $\frac{۱۳}{۷}$) + ۷ ($\frac{۳}{۷}$) + ۱۰ = - ۱۳ + ۳ + ۱۰ = ۰

پس تحویل شدہ مساوات ۲ لاَ۲ + لا ما - ۶ ما۲ = ۰ ہے، جس میں لا، ما نئے محدّد ہیں بلحاظ نقطۂ تقاطع کے۔

(د) درجۂ دوم کی عام سے عام مساوات

ا لاَ۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ . . . . (ب)

ہے۔ فرض کرو کہ یہ دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر نہیں کرتی، کسی اَور لوکس یا طریق کو تعبیر کرتی ہے۔ تاہم کسی اختیاری نقطہ (لاٗ، ماٗ) پر ہم مبداء لے جانے سے مساوات کو حسبِ بالا تحویل کرتے ہیں یعنی

ا لاَ۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما۲ + لا (ا لاٗ + ھ ماٗ + گ) + ما (ھ لاٗ + ب ماٗ + ف)

+ ا لاٗ۲ + ۲ ھ لاٗ ماٗ + ب ماٗ۲ + ۲ گ لاٗ + ۲ ف ماٗ + ج = ۰ . . . . (ط)

جس میں لا، ما نئے محدّد ہیں بلحاظ نقطہ لاٗ، ماٗ کے ان کے زبروں کو حذف کر دیا گیا ہے۔

نقطہ (لا، ہا) اتنک اختیاری ہے، اسے ہم ایسا نقطہ لیتے ہیں جو ذیل کی مساواتوں کو پورا کرے

$$\left.\begin{array}{l} \text{ا لا} + \text{ھ ہا} + \text{گ} = ۰ \\ \text{ھ لا} + \text{ب ہا} + \text{ف} = ۰ \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{ص})$$

جن سے

$$\text{لا} = \frac{\text{ھ ف} - \text{ب گ}}{\text{اب} - \text{ھ}^۲}،\quad \text{ہا} = \frac{\text{گ ھ} - \text{ا ف}}{\text{اب} - \text{ھ}^۲}$$

اور یہ نقطہ محدود فاصلہ پر ہوگا اگر $\text{اب} - \text{ھ}^۲$ صفر کے مساوی نہ ہو یعنی اصلی مساوات میں درجۂ دوم کی رقمیں مربع کامل نہ بنائیں۔

فرض کرو کہ $\text{اب} - \text{ھ}^۲ \neq ۰$، تو لا، ہا کی قیمت بالا لینے سے تحویل شدہ مساوات میں لا اور ہا کے سر دونوں صفر ہو جاتے ہیں۔

اب جیسا ہم نے اُوپر دیکھا ہے، مستقل رقم

$$\text{ا لا}^۲ + ۲\,\text{ھ لا ہا} + \text{ب ہا}^۲ + ۲\,\text{گ لا} + ۲\,\text{ف ہا} + \text{ج}$$

اس طرح لکھی جا سکتی ہے

$$\text{لا}(\text{ا لا} + \text{ھ ہا} + \text{گ}) + \text{ہا}(\text{ھ لا} + \text{ب ہا} + \text{ف}) + \text{گ لا} + \text{ف ہا} + \text{ج}$$

$= \text{گ لا} + \text{ف ہا} + \text{ج}$ کیونکہ پہلی دو رقمیں (ص) کی رُو سے صفر ہو جاتی ہیں

$$= \text{گ}\left(\frac{\text{ھ ف} - \text{ب گ}}{\text{اب} - \text{ھ}^۲}\right) + \text{ف}\left(\frac{\text{گ ھ} - \text{ا ف}}{\text{اب} - \text{ھ}^۲}\right) + \text{ج}$$

$$= \frac{\text{اب ج} + ۲\,\text{ف گ ھ} - \text{ا ف}^۲ - \text{ب گ}^۲ - \text{ج ھ}^۲}{\text{اب} - \text{ھ}^۲}$$

پس تحویل شدہ مساوات کی حسبِ ذیل شکل حاصل ہوتی ہے:

$$\text{ا لا}^۲ + ۲\,\text{ھ لا ہا} + \text{ب ہا}^۲ + \frac{\text{اب ج} + ۲\,\text{ف گ ھ} - \text{ا ف}^۲ - \text{ب گ}^۲ - \text{ج ھ}^۲}{\text{اب} - \text{ھ}^۲} = ۰ \quad \ldots\ldots (\text{ع})$$

پس ہم دیکھتے ہیں کہ درجۂ دوم کی عام سے عام مساوات کو مبداء بدل کر

ایسی مساوات میں تحویل کرسکتے ہیں جس میں لا، ما کے سر صفر ہوں اور تحویل شدہ مساوات کی شکل (ع) ہو۔ واضح ہو کہ اس میں درجۂ دوم کی رقمیں اسی شکل کی ہیں جو اصلی مساوات میں اصرف (ع) میں محدّد نئے ہیں۔ اگر درجۂ دوم کی عام مساوات دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرے اور نیا مبداء نقطۂ تقاطع ہو تو مساوات کی شکل متجانس ہونی چاہیے۔ یعنی (ع) سے

ا ب ج + ۲ ف گ ھ − ا ف^2 − ب گ^2 − ج ھ^2 = ۰

مثال ۔ مساوات درجۂ دوم لا^2 + ۱۰ لا ما + ما^2 − ۱۲ لا − ۱۲ ما + ۶ = ۰ کو مبداء بدلنے سے ایسی شکل میں تحویل کرو کہ لا، ما والی رقموں کے سر صفر ہو جائیں اور دیکھو کہ یہ مساوات دو خطوط کو تعبیر کرتی ہے یا نہیں۔

مبداء کو (لا، ہا) پر لے جانے سے عام مساوات ہو جاتی ہے

ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + لا (ا لا + ھ ہا + گ) + ما (ھ لا + ب ہا + ف)
+ گ لا + ف ہا + ج = ۰

لا، ما والی رقموں کے سر صفر ہونگے اگر

ا لا + ھ ہا + گ = ۰

ھ لا + ب ہا + ف = ۰

مساوات سے قیمتیں درج کرنے پر

لا + ۵ ہا − ۶ = ۰
۵ لا + ہا − ۶ = ۰

لا = ۱، ہا = ۱

اور مستقل رقم گ لا + ف ہا + ج = (−۶)(۱) + (−۶)(۱) + ۶

= −۶

پس تحویل شدہ مساوات ہو جاتی ہے۔

لا^2 + ۱۰ لا ما + ما^2 − ۶ = ۰ جو خطوطِ مستقیم کو تعبیر نہیں کرتی کیونکہ مستقل رقم صفر نہیں ہے۔

متفرق مثالیں اور سوالات ۹

۱ ۔ ا اور ب دو ثابت نقطے ہیں، ایک نقطہ ن اس طرح حرکت کرتا ہے کہ

(ا) ن ا^2 + ن ب^2 = مستقل

(ب) ن ا / ن ب = مستقل

(ج) ن ا × ن ب = مستقل

(د) ن ا + ن ب = مستقل

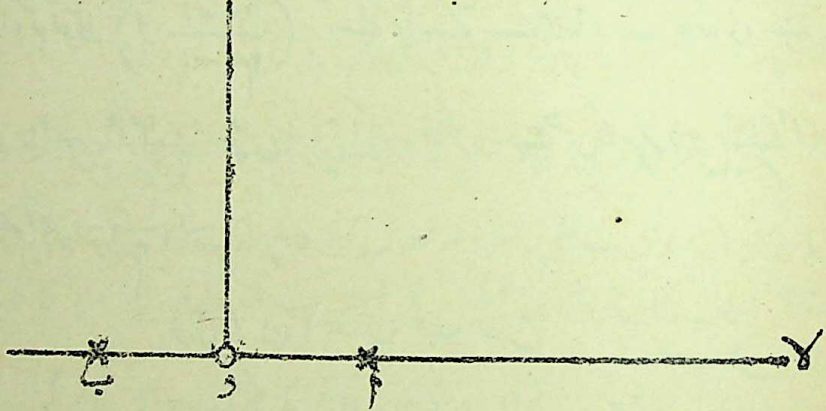
(ہ) ن ا − ن ب = مستقل

ہر صورت میں ن کا طریق (لوکس) دریافت کرو۔

ن (لا، ما)

ما

لا

ب و ا

ا، ب ثابت نقطے ہیں، ان کے نقطۂ تنصیف و کو مبداء مانو اور ب و ا محور لا اور اس کے علی القوائم ما کا محور و ما لو۔

فرض کرو کہ ب و = و ا = ل، تب ا کے محدد (ل، ۰) ہیں اور ب کے محدد (−ل، ۰) اور نقطہ ن کے محدد ان محوروں اور مبداء کے لحاظ سے لا، ما ہیں۔

صورت (ا) ن ا^2 + ن ب^2 = مستقل = ۲ ج^2

یعنی (لا − ل)^2 + ما^2 + (لا + ل)^2 + ما^2 = ۲ ج^2

لا^2 + ما^2 = ج^2 − ل^2 جو دائرہ ہے جس کا مرکز مبداء و ہے

اور نصف قطر $\sqrt{}$ ج^2 − ل^2

(ب) $\frac{\text{ن ا}}{\text{ن ب}} = \text{م}$ یعنی $\frac{\text{ن ا}^2}{\text{ن ب}^2} = \text{م}^2$

$$(\text{لا}-\text{و})^2 + \text{ما}^2 = \text{م}^2 \left\{ (\text{لا}+\text{و})^2 + \text{ما}^2 \right\}$$

$$\text{لا}^2(1-\text{م}^2) + \text{ما}^2(1-\text{م}^2) - 2\,\text{لا و}\,(1+\text{م}^2) + \text{و}^2(1-\text{م}^2) = 0$$

$$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 - 2\,\text{لا و}\,\frac{1+\text{م}^2}{1-\text{م}^2} + \text{و}^2 = 0$$

$$\left[\text{لا} - \text{و}\,\frac{1+\text{م}^2}{1-\text{م}^2}\right]^2 + \text{ما}^2 = -\text{و}^2 + \text{و}^2\left(\frac{1+\text{م}^2}{1-\text{م}^2}\right)^2 = \frac{4\,\text{و}^2\text{م}^2}{(1-\text{م}^2)^2}$$

مبداء کو نقطہ $\left(\text{و}\,\frac{1+\text{م}^2}{1-\text{م}^2}،\,0\right)$ پر لے جانے سے مساوات ہو جاتی ہے

$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \frac{4\,\text{و}^2\text{م}^2}{(1-\text{م}^2)^2}$ پس طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز $\left(\text{و}\,\frac{1+\text{م}^2}{1-\text{م}^2}،\,0\right)$ ہے
اور نیم قطر $\frac{2\,\text{و م}}{1-\text{م}^2}$ ۔

(ج) $\text{ن ا} \times \text{ن ب} = \text{ج}^2$

$$\left\{(\text{لا}-\text{و})^2 + \text{ما}^2\right\}\left\{(\text{لا}+\text{و})^2 + \text{ما}^2\right\} = \text{ج}^4$$

$$(\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{و}^2 - 2\,\text{لا و})(\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{و}^2 + 2\,\text{لا و}) = \text{ج}^4$$

$$(\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{و}^2)^2 - 4\,\text{لا}^2\text{و}^2 = \text{ج}^4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(عہ)}$$

$$\text{لا}^4 + \text{ما}^4 + \text{و}^4 + 2\,\text{لا}^2\text{ما}^2 - 2\,\text{لا}^2\text{و}^2 + 2\,\text{ما}^2\text{و}^2 - \text{ج}^4 = 0$$

پس لا، ما کا طریق یہ چوتھے رتبہ کا منحنی ہے۔ اسے کیسنی کا بیضہ کہا جاتا ہے۔ اگر اس مساوات کو بدل کر قطبی محدّدوں میں لے جائیں تو رکھنا ہوگا

$$\text{لا} = \text{ر جم طہ}،\quad \text{ما} = \text{ر جب طہ}$$

عہ میں درج کرنے سے $(\text{ر}^2 + \text{و}^2)^2 - 4\,\text{ر}^2\text{و}^2\,\text{جم}^2\,\text{طہ} = \text{ج}^4$

یعنی ر۴ + ا۴ + ۲ر۲ ا۲ − ۲ ا۲ ر۲ (۱ + جم ۲ طہ) = ج۴

یعنی ر۴ + ا۴ − ۲ر۲ ا۲ جم ۲ طہ = ج۴ .... (ا)

اگر رکھیں ج = ا = ص/۲ تو

ر۴ + ص۴/۱۶ − ۲ × ر۲ ص۲/۴ جم ۲ طہ = ص۴/۱۶

ر۲ = ص۲ جم ۲ طہ .... (ب)

یہ کیسنی کے بیضوں کی خاص صورت ہے جو ایٹرن کی شکل سے مشابہت رکھتی ہے، اسے برنولی کے نام سے منسوب کرتے ہیں۔ اشکال (د)، (ع) پہلے دی جا چکی ہیں۔

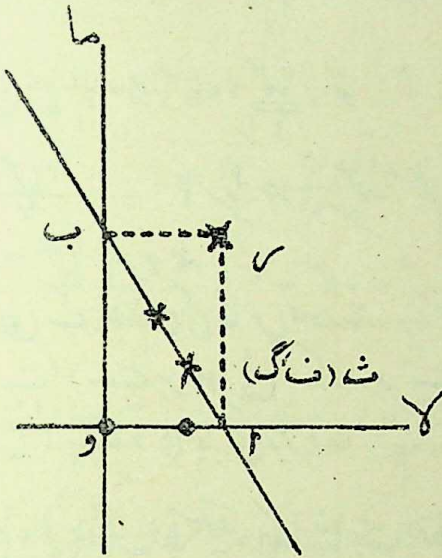
مثال (۲) (ا) ایک خطِ مستقیم ایک ثابت نقطہ (ف، گ) میں سے گزرتا ہے اور دو ثابت علی القوائم خطوں کو جو وہ پر ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں نقاط ا، ب پر کاٹتا ہے، مستطیل و ا ر ب بنایا گیا ہے، ر کا طریق دریافت کرو۔

(ب) ایک خط، ایک ثابت نقطہ (ف، گ) میں سے گزرتا ہے، علی القوائم محوروں کے درمیان یہ جو حصہ کاٹتا ہے اس کے نقطۂ تنصیف کا طریق دریافت کرو۔

(ج) نقطہ (لا، یا) ایک خط کے مقطوعہ کا نقطۂ تنصیف ہے جو علی القوائم محوروں کے درمیان کٹتا ہے، خط کی مساوات دریافت کرو۔

(د) مبداء میں سے ایک خط گذرتا ہے جو دونوں محوروں پر کے ساتھ مساوی زاویے بناتا ہے، اس خط پر کوئی ایک نقطہ لیا گیا ہے، ثابت کرو کہ اس نقطہ میں سے گذرنے والے سب خطوط کے جو مقطوعے محوروں پر کٹتے ہیں ان کے متکافیوں کا مجموعہ مستقل ہے۔

(ع) ایک خط علی القوائم محوروں کے ساتھ جو مثلث کاٹتا ہے اس کا رقبہ مستقل ہے، خط کے وسطی نقطہ کا طریق دریافت کرو۔

حل حصہ (ا) خط ثابت نقطہ ث (ف، گ) میں سے گزرتا ہے، فرض کرو کہ س کے مجدّد (عہ، بہ) ہیں جن میں رشتہ مطلوب ہے۔ اب و ا = عہ، و ن = بہ

پس خط ا ب کی مساوات $\frac{لا}{عہ} + \frac{ما}{بہ} = ۱$ ہے اور چونکہ خط (ف، گ) میں سے گزرتا ہے اس لیے $\frac{ف}{عہ} + \frac{گ}{بہ} = ۱$،

پس یہ (عہ، بہ) کا طریق ہے، اگر (عہ، بہ) کی بجائے عام نقطہ (لا، ما) رکھ دیا جائے تو طریق اس شکل میں لکھا جا سکیگا۔

$$\frac{ف}{لا} + \frac{گ}{ما} = ۱ \quad ....(۱)$$

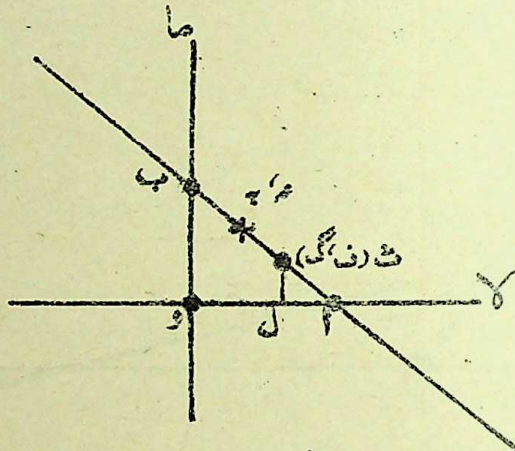
(ب) ثابت نقطہ (ف، گ) ہے۔ وسطی نقطہ (عہ، بہ) کا طریق مطلوب ہے۔

و ا = ۲ عہ، و ب = ۲ بہ

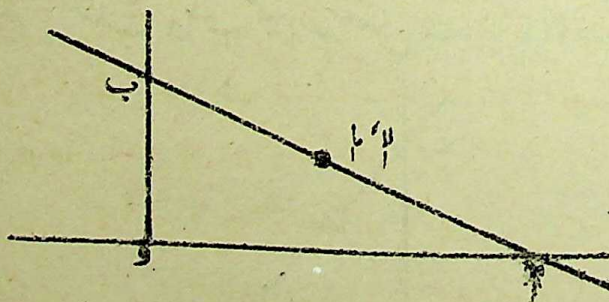
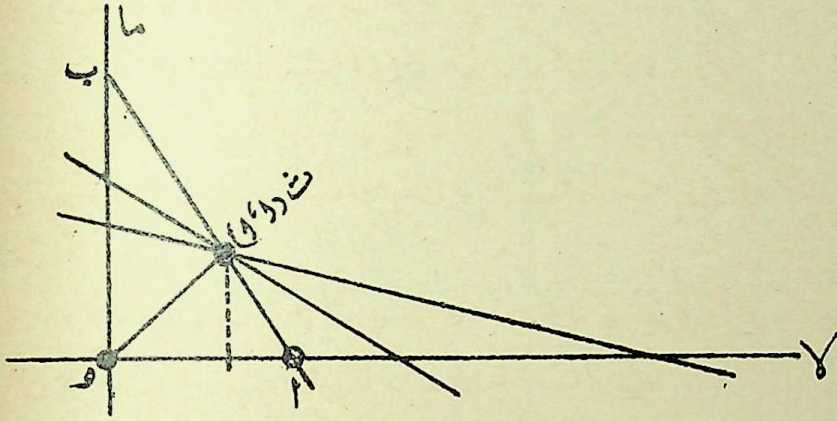
متشابہ مثلثوں سے $\frac{ث ل}{ل ا} = \frac{و ب}{و ا}$

یعنی گ / (۲عہ - ف) = ۲بہ / ۲عہ یعنی گ / (۲عہ - ف) = بہ / عہ

پس عہ گ = (۲عہ - ف) بہ یا عہ گ + ف بہ = ۲عہ بہ

عہ بہ پر تقسیم کرنے سے ف / عہ + گ / بہ = ۲ جو عہ، بہ کا طریق ہے۔

عہ، بہ کی بجائے لا، ما رکھنے سے ف / لا + گ / ما = ۲ جو حسبِ معمول ترقیم میں طریق کی مساوات ہے۔

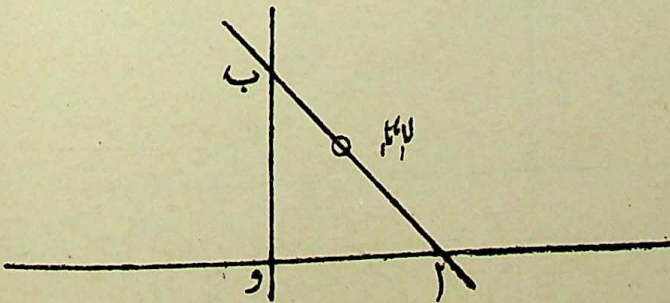
(ج) اب کا نقطۂ تنصیف (لا، ما) دیا ہوا ہے، خط کی مساوات مطلوب ہے۔

و ا = ۲ لا، و ب = ۲ ما، خط کی مساوات ہے $\frac{لا}{۲لا} + \frac{ما}{۲ما} = ۱$

(د) خطوط ث محوروں کے ساتھ مساوی زاویے بناتا ہے اس پر کوئی ثابت نقطہ (ل، ل) ہوگا جہاں ل معلومہ مقدار ہے۔

فرض کرو (ل، ل) میں سے گزرنے والے کسی خط کے مقطوعے محوروں پر عہ، بہ ہیں، تب ا ب کی مساوات $\frac{لا}{عہ} + \frac{ما}{بہ} = ۱$ ہے۔

ا ب چونکہ خط (ل، ل) میں سے گزرتا ہے اس لیے $\frac{ل}{عہ} + \frac{ل}{بہ} = ۱$ یعنی

$\frac{۱}{عہ} + \frac{۱}{بہ} = \frac{۱}{ل}$ (مستقل مقدار)، یہی مطلوب تھا۔

(ع) مثلث و ا ب کا رقبہ مستقل ہے۔ (لا، ما) ا ب کا وسطی نقطہ ہے،

اس لیے و ا = ۲ لا، و ب = ۲ ما

پس رقبہ = ۲ لا ما = مستقل، پس (لا، ما) کا طریق لا ما = مستقل (ج۲) ہے۔

مثال (۳) (ا) خطوط $ما = م_1 لا + ب_1$ اور $ما = م_2 لا + ب_2$ اور لا = ۰ کے درمیان جو مثلث بنتا ہے اس کا رقبہ دریافت کرو۔

(ب) خطوط $ما = م_1 لا + ب_1$، $ما = م_2 لا + ب_2$، $ما = م_3 لا + ب_3$ کے درمیان جو مثلث بنتا ہے، اس کا رقبہ دریافت کرو۔

(ج) خطوط $ا_1 لا + ب_1 ما + ج_1 = 0$، $ا_2 لا + ب_2 ما + ج_2 = 0$، $ا_3 لا + ب_3 ما + ج_3 = 0$ کے درمیان جو مثلث بنتا ہے اس کا رقبہ دریافت کرو۔

(د) خطوط $ما = م_1 لا$، $ما = م_2 لا$ اور $ا لا + ب ما + ج = 0$ کے درمیان جو مثلث بنتا ہے اس کا رقبہ دریافت کرو۔

حل۔ (ا) نقطہ ا کے لیے $م_1 لا + ب_1 = م_2 لا + ب_2$

$(م_2 - م_1) لا = ب_1 - ب_2$

یعنی $لا = \frac{ب_1 - ب_2}{م_2 - م_1}$ اور $ج ب = ب_1 - ب_2$

پس رقبہ $ج ا ب = \frac{1}{2} \frac{(ب_1 - ب_2)^2}{م_2 - م_1}$

(ب) $\triangle$ ا ب ج = $\triangle$ ا م$_1$ م$_2$ + $\triangle$ م$_2$ م$_3$ ج − $\triangle$ م$_1$ م$_3$ ب

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(\text{ب}_1-\text{ب}_2)^2}{\text{م}_1-\text{م}_2} + \frac{1}{2}\,\frac{(\text{ب}_2-\text{ب}_3)^2}{\text{م}_2-\text{م}_3} - \frac{1}{2}\,\frac{(\text{ب}_1-\text{ب}_3)^2}{\text{م}_1-\text{م}_3}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(\text{ب}_2-\text{ب}_1)^2}{\text{م}_1-\text{م}_2} + \frac{1}{2}\,\frac{(\text{ب}_3-\text{ب}_2)^2}{\text{م}_2-\text{م}_3} + \frac{1}{2}\,\frac{(\text{ب}_1-\text{ب}_3)^2}{\text{م}_3-\text{م}_1}$$

(ج) مثلث کا رقبہ $= \frac{1}{2}\,\frac{\left(-\frac{\text{ج}_1}{\text{ب}_1}+\frac{\text{ج}_2}{\text{ب}_2}\right)^2}{\left(-\frac{\text{ا}_2}{\text{ب}_2}+\frac{\text{ا}_1}{\text{ب}_1}\right)} + \;\ldots + \;\ldots$

$$= \frac{(\text{ب}_2\text{ج}_1-\text{ب}_1\text{ج}_2)^2}{\text{ب}_1\text{ب}_2(\text{ا}_2\text{ب}_1-\text{ا}_1\text{ب}_2)} + \frac{(\text{ب}_3\text{ج}_2-\text{ب}_2\text{ج}_3)^2}{\text{ب}_2\text{ب}_3(\text{ا}_3\text{ب}_2-\text{ا}_2\text{ب}_3)}$$

$$+ \frac{(\text{ب}_1\text{ج}_3-\text{ب}_3\text{ج}_1)^2}{\text{ب}_3\text{ب}_1(\text{ا}_1\text{ب}_3-\text{ا}_3\text{ب}_1)}$$

(د) نقطہ ا کے لیے ا لا + ب م$_1$ لا + ج = ۰

لا (ا + ب م$_1$) + ج = ۰

لا = $-\frac{\text{ج}}{\text{ا}+\text{ب م}_1}$ اور ا کا ما محدد = $-\frac{\text{م}_1\text{ج}}{\text{ا}+\text{ب م}_1}$

نقطہ ب کے محدد $\left(-\frac{\text{ج}}{\text{ا}+\text{ب م}_2}\ ,\ -\frac{\text{م}_2\text{ج}}{\text{ا}+\text{ب م}_2}\right)$

$$\triangle \text{ وا ب} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ -\frac{ج}{ا+ب م_1} & -\frac{م_1 ج}{ا+ب م_1} & ۱ \\ -\frac{ج}{ا+ب م_2} & -\frac{م_2 ج}{ا+ب م_2} & ۱ \end{vmatrix} = \frac{\frac{1}{2} ج^2 (م_2 \sim م_1)}{(ا+ب م_1)(ا+ب م_2)}$$

بموجب اس کے کہ $م_2 \gtrless م_1$

مثال ۴ ۔ (ا) مبداء میں سے گزرنے والے دو خط $ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 = ۰$ سے تعبیر ہوتے ہیں، ان خطوں پر، مبداء میں سے گذرنے والے علی القوائم دو خط ہونگے ان کی مشترک مساوات حاصل کرو۔

(ب) نقطہ $(لا_1، ما_1)$ سے خطوں $ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 = ۰$ پر جو دو عمود کھینچ سکتے ہیں اُن کا حاصل ضرب دریافت کرو۔

(ج) اس کے لیے شرط معلوم کرو کہ $ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 = ۰$ میں کا ایک خط $اَ لا^2 + ۲ ھَ لا ما + بَ ما^2 = ۰$ میں کے ایک خط پر منطبق ہو۔

(د) اس کے لیے شرط دریافت کرو کہ $ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 = ۰$ میں کا ایک خط $اَ لا^2 + ۲ ھَ لا ما + بَ ما^2 = ۰$ میں کے ایک خط پر علی القوائم ہو۔

حل (ل) فرض کرو کہ $\text{ب}\left(\text{ما}^{2} + \frac{2\text{ھ}}{\text{ب}}\text{لا ما} + \frac{\text{ل}}{\text{ب}}\text{لا}^{2}\right)$

$= \text{ب}\left(\text{ما} - \text{م}_{1}\text{لا}\right)\left(\text{ما} - \text{م}_{2}\text{لا}\right)$

جس سے $\text{م}_{1} + \text{م}_{2} = -\frac{2\text{ھ}}{\text{ب}}$ ، $\text{م}_{1}\text{م}_{2} = \frac{\text{ل}}{\text{ب}}$

اب دیے ہوئے خطوں پر علی القوائم خط ہونگے $\text{ما} - \text{مَ}_{1}\text{لا} = 0$، $\text{ما} - \text{مَ}_{2}\text{لا} = 0$

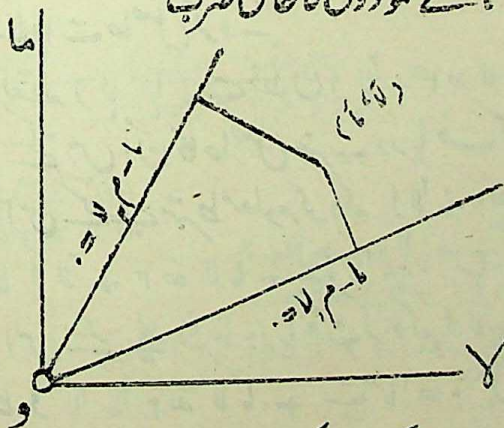
جہاں $\text{م}_{1}\text{مَ}_{1} = -1$، $\text{م}_{2}\text{مَ}_{2} = -1$

پس علی القوائم خط ہونگے $\left(\text{ما} + \frac{1}{\text{م}_{1}}\text{لا}\right)\left(\text{ما} + \frac{1}{\text{م}_{2}}\text{لا}\right) = 0$

یعنی $\text{ما}^{2} + \text{لا ما}\left(\frac{1}{\text{م}_{1}} + \frac{1}{\text{م}_{2}}\right) + \frac{1}{\text{م}_{1}\text{م}_{2}}\text{لا}^{2} = 0$

یعنی $\text{ما}^{2} + \text{لا ما}\left(\frac{-\frac{2\text{ھ}}{\text{ب}}}{\frac{\text{ل}}{\text{ب}}}\right) + \frac{\text{ب}}{\text{ل}}\text{لا}^{2} = 0$

یعنی $\text{ل ما}^{2} - 2\text{ھ لا ما} + \text{ب لا}^{2} = 0$

پس علی القوائم خطوں کا جوڑا ہے $\text{ب لا}^{2} - 2\text{ھ لا ما} + \text{ل ما}^{2} = 0$

(ب) لاَ، ماَ سے عمودوں کا حاصل ضرب

ما

(لاَ، ماَ)

$\text{ما} - \text{م}_{2}\text{لا} = 0$

$\text{ما} - \text{م}_{1}\text{لا} = 0$

لا

و

$= \frac{\text{ماَ} - \text{م}_{1}\text{لاَ}}{\sqrt{1 + \text{م}_{1}^{2}}} \times \frac{\text{ماَ} - \text{م}_{2}\text{لاَ}}{\sqrt{1 + \text{م}_{2}^{2}}}$

$$= \frac{\text{ما}^2 - (\text{م}_1 + \text{م}_2)\,\text{لا ما} + \text{م}_1\text{م}_2\,\text{لا}^2}{\sqrt{1 + (\text{م}_1^2 + \text{م}_2^2) + \text{م}_1^2\text{م}_2^2}} = \frac{\text{ما}^2 - \text{لا ما}\left(-\frac{2\text{ه}}{\text{ب}}\right) + \frac{\text{ل}}{\text{ب}}\,\text{لا}^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{4\text{ه}^2}{\text{ب}^2} - \frac{2\text{ل}}{\text{ب}}\right) + \frac{\text{ل}^2}{\text{ب}^2}}}$$

$$= \frac{\text{ل لا}^2 - 2\text{ه لا ما} + \text{ب ما}^2}{\sqrt{\text{ل}^2 + \text{ب}^2 + (4\text{ه}^2 - 2\text{ل ب})}} = \frac{\text{ل لا}^2 - 2\text{ه لا ما} + \text{ب ما}^2}{\sqrt{(\text{ل} - \text{ب})^2 + 4\text{ه}^2}}$$

(ج) فرض کرو $\text{ما} - \text{م لا} = 0$ خطوں کے جوڑوں $\text{ل لا}^2 + 2\text{ه لا ما} + \text{ب ما}^2 = 0$

اور $\text{لَ لا}^2 + 2\text{هَ لا ما} + \text{بَ ما}^2 = 0$ میں مشترک ہے یعنی خط $\frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \text{م}$ مشترک ہے۔ پس $\frac{\text{ما}}{\text{لا}}$ کی رقوم میں مساواتوں کو لکھنے سے واضح ہے کہ $\frac{\text{ما}}{\text{لا}}$ کی ایک ہی قیمت م کے لیے دونوں مساواتیں پوری ہوتی ہیں۔ پس

$$\text{ب م}^2 + 2\text{ه م} + \text{ل} = 0$$

$$\text{بَ م}^2 + 2\text{هَ م} + \text{لَ} = 0$$

جس سے

$$\frac{\text{م}^2}{2\text{ه لَ} - 2\text{هَ ل}} = \frac{\text{م}}{\text{ل بَ} - \text{لَ ب}} = \frac{1}{2\text{هَ ب} - 2\text{ه بَ}}$$

پس شرط مطلوبہ ہے

$$(\text{ل بَ} - \text{لَ ب})^2 = 4(\text{ه لَ} - \text{هَ ل})(\text{هَ ب} - \text{ه بَ})$$

(د) $(\text{ل لا}^2 + 2\text{ه لا ما} + \text{ب ما}^2) = \text{ب}(\text{ما} - \text{م لا})(\text{ما} - \text{مَ لا})$

$(\text{لَ لا}^2 + 2\text{هَ لا ما} + \text{بَ ما}^2) = \text{بَ}(\text{ما} + \frac{1}{\text{م}}\text{لا})(\text{ما} - \text{مً لا})$

جہاں ایک جوڑے میں $\text{ما} - \text{م لا} = 0$ اور دوسرے جوڑے میں $\text{ما} + \frac{1}{\text{م}}\text{لا} = 0$ باہم علی القوائم ہیں۔

پہلے جوڑے میں $\frac{\text{ما}}{\text{لا}}$ کی بجائے م رکھنے سے $\text{ب م}^2 + 2\text{ه م} + \text{ل} = 0$

دوسرے جوڑے میں $\frac{\text{ما}}{\text{لا}}$ 〃 〃 $-\frac{1}{\text{م}}$ 〃 〃 $\text{بَ}\left(-\frac{1}{\text{م}}\right)^2 + 2\text{هَ}\left(-\frac{1}{\text{م}}\right) + \text{لَ} = 0$

یعنی $\text{بَ} - 2\text{هَ م} + \text{لَ م}^2 = 0$

پس ب م۲ + ۲ ھ م + ا = ۰

اور اَ م۲ ـ ۲ ھَ م + بَ = ۰

سے م ساقط کرنے سے شرط حاصل ہوتی ہے۔

$$\frac{م^2}{۲ ھ بَ + ۲ ھَ ا} = \frac{م}{ا اَ - ب بَ} = \frac{۱}{-۲ ھَ ب - ۲ ھ اَ}$$

پس شرط مطلوبہ ہے

(ا اَ ـ ب بَ)۲ + ۴ (ھ بَ + ھَ ا) (ھَ ب + ھ اَ) = ۰

مثال ۵۔ ایک مثلث کے راسوں ا، ب، ج کے محدّد بالترتیب (۲، ۱۵)، (۱۶، ۱) اور (۱۹، ۲۲) ہیں۔ مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز کے محدّد معلوم کرو۔

حل (ب ج)۲ = (۱۶ ـ ۱۹)۲ + (۱ ـ ۲۲)۲ = ۹ + ۴۴۱ = ۴۵۰

یعنی ب ج = ۱۵ $\sqrt{۲}$

اسی طرح سے ا ج = ۱۳ $\sqrt{۲}$ اور ا ب = ۱۴ $\sqrt{۲}$

اگر مثلث کے زاویہ ا کا داخلی منصّف مقابل کے ضلع ب ج سے نقطہ د پر ملے تو د پر ب ج کی داخلی تقسیم ا ب : ا ج یعنی ۱۴ : ۱۳ کی نسبت میں ہوگی۔

$$\text{اس لیے د کا فصلہ} = \frac{(۱۶ \times ۱۳) + (۱۹ \times ۱۴)}{۱۳ + ۱۴} = \frac{۱۵۸}{۹}$$

$$\text{اور د کا معیّن} = \frac{(۱ \times ۱۳) + (۲۲ \times ۱۴)}{۱۳ + ۱۴} = \frac{۱۰۷}{۹}$$

اس لیے زاویہ ا کے داخلی منصّف ا د کی مساوات ہوگی

$$\frac{ما - ۵}{لا - ۲} = \frac{\frac{۱۰۷}{۹} - ۱۵}{\frac{۱۵۸}{۹} - ۲} = -\frac{۱}{۵}$$

یعنی　لا + ۵ ما - ۲۲ = ۰ .... (۱)
اسی طرح سے زاویہ ب کے داخلی منصف ب ع کی مساوات ہوگی
۳ لا + ما - ۳۹ = ۰ .... (۲)
خطوط (۱) اور (۲) کا نقطۂ تقاطع مثلث اب ج کا اندرونی مرکز ہے اور اندرونی مرکز کے محدد ہیں (۱۲، ۱۳) -

مشق (۱) سوال بالا میں مثلث اب ج کے رأس ا کے مقابل کے جانبی دائرہ کا مرکز معلوم کرو -

اشارہ - مطلوبہ مرکز زاویہ ا کے داخلی منصف اور زاویہ ب کے خارجی منصف کا نقطۂ تقاطع ہے - زاویہ ب کے خارجی منصف کی مساوات ہوگی
لا - ۳ ما - ۱۳ = ۰　اس لیے مطلوبہ نقطہ کے محدد ہیں (۵ء۱۰، ۵ء۴۴)

مشق (۲) ایک مثلث کے رأسوں کے محدد (۱، ۲) (۲۵، ۸) اور (۹، ۲۱) ہیں - مثلث کے اندرونی مرکز کے محدد معلوم کرو -
[جواب (۵ء۱۱، ۱۱)]

باب دوم پر متفرق مشقی سوالات

(۱) ثابت کرو کہ نقاط (۰، ۳)، (۳، ۷)، (۷، ۴) اور (۴، ۰) ایک مربع کے رأس ہیں -

(۲) ایک مثلث کے رأسوں کے محدد (۰، ۴)، (۳-، ۰)، (۰، ۱-) ہیں - ثابت کرو کہ یہ مثلث قائم الزاویہ ہے - نیز ثابت کرو کہ اس مثلث کے وسطانیے ہم نقطہ ہیں -

(۳) ایک قائم الزاویہ مثلث کے دو رأسوں کے محدد (۰، ۱)، (ب، ۰) ہیں - اس کے وتر کے وسطی نقطہ کے محدد معلوم کرو -
جواب ($\frac{1}{2}$، $\frac{ب}{2}$)

(۴) دریافت کرو کہ ذیل کے ہر حصّہ میں جو تین خط دیے گئے ہیں وہ ہم نقطہ ہیں یا نہیں ؟

(ا) لا ـ ۲ ما + ۱ = ۰، ۳ لا ـ ۷ ما + ۴ = ۰، لا = ۱

(ب) ۴ لا ـ ۳ ما + ۲ = ۰، ۳ لا + ۴ ما ـ ۱ = ۰، لا + ما + ۲ = ۰

(ج) ۷ لا ـ ۵ ما = ۷، لا + ۲ ما = ۱، ۵ لا ـ ۳ ما ـ ۵ = ۰

(د) ما ـ ۴ لا = ۵، ما ـ ۳ لا = ۴، ما ـ ۲ لا = ۳

(۵) ایک مثلث کے رأسوں کے محدد (۰، ۴)، (۳، ۰)، (ـ۱، ۰) ہیں۔ ثابت کرو کہ اس کے رأسی زاویوں کے اندرونی مُنصِّف ایک ہی نقطہ پر ملتے ہیں۔

(۶) ثابت کرو کہ خطوط لا² ـ ۴ ما² + ۵ لا + ۲ ما + ۶ = ۰ کے درمیانی زاویوں کے مُنصِّفوں کی مشترکہ مساوات ۸ لا ما ـ ۲ لا + ۲۰ ما ـ ۵ = ۰ ہے۔

(۷) ایک چار ضلعی شکل کے اضلاع مساواتوں

لا² ـ ۶ لا ما + ۹ ما² ـ ۷ لا + ۲۱ ما + ۱۰ = ۰، اور ۹ لا² + ۶ لا ما + ما² ـ ۳ لا ـ ما ـ ۱۲ = ۰

سے تعبیر ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ شکل مستطیل ہے۔

(۸) اُس خط کی مساوات معلوم کرو جس پر مبداء سے گرائے ہوئے عمود کا میلان ۱۳۵° ہو اور (ا) جس کے مقطوعوں کا حاصل ضرب ـ ۲ ہو (ب) جو نقطہ (۴، ـ۳) میں سے گزرے (ج) نقطہ (ـ۲، ـ۴) سے خط کا فاصلہ ۴ √۲ ہو۔

جواب:ـ (ا) لا ـ ما = ۲ √۲، (ب) ما ـ لا = ۲ √۲

(ج) لا ـ ما = ۶

(۹) اُس خط کی مساوات دریافت کرو جو ۳ لا + ۴ ما = ۱۰ کے متوازی ہو اور جو خطوط ۳ لا + ۴ ما = ۱۰ اور ۳ لا + ۴ ما = ۳۰ کے درمیانی فاصلہ کو ۳ : ۱ کی نسبت میں تقسیم کرے۔

جواب　۳ لا + ۴ ما = ۲۵

(۱۰) ایک مثلث کے اضلاع مساواتوں لا = ۰، ما = ۰؛ اور ۲ لا + ما ـ ۴ = ۰ سے تعبیر ہوتے ہیں۔ نقطہ (۳، ۱) سے ان اضلاع پر عمود ڈالے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان عمودوں کے پائیں ایک ہی خطِ مستقیم میں واقع ہوتے ہیں۔

(۱۱) ان خطوط کی مساواتیں معلوم کرو جو نقطہ (۳، ۶) میں سے گزرتے ہیں اور اس نقطہ سے ۵ فاصلہ پر خط لا + ما - ۲ = ۰ کو قطع کرتے ہیں۔

جواب: ۴لا - ۳ما + ۶ = ۰، ۳لا - ۴ما + ۱۵ = ۰

(۱۲) ک کی کس قیمت کے لیے مساوات لا² - لاما - ۶ما² + ۲لا - ما + ک = ۰ دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کریگی۔ ان خطوں کا درمیانی زاویہ معلوم کرو۔

جواب: ک = ۱، درمیانی زاویہ = ۴۵°

(۱۳) دریافت کرو کہ ل کی کس قیمت کے لیے مساوات لا - ل ما - ۶ = ۰ اور مساوات ل لا - ۹ما + ۱۸ = ۰ ایک ہی خطِ مستقیم کو تعبیر کرینگے۔

جواب: ل = -۳

(۱۴) دو خطوطِ مستقیم ل۱ اور ل۲ نقطہ (-۳، -۲) پر قطع کرتے ہیں؛ ل۱ کا مقطوعہ محور ما پر -۴ ہے اور دونوں خطوں کا درمیانی زاویہ مس⁻¹ ۱۷/۴ ہے۔ دونوں خطوں کی مساواتیں معلوم کرو۔

جواب: ۲لا + ۳ما + ۱۸ = ۰، لا - ۱۸ما - ۵۲ = ۰

(۱۵) ایک مثلث کے اضلاع کی مساواتیں

لا + ۲ما - ۴ = ۰، ۳لا - ما + ۶ = ۰ اور ۴لا - ۵ما - ۲۳ = ۰

ہیں۔ تحلیلی طریقہ پر تصدیق کرو کہ ا پر کا خارجی زاویہ ب اور ج پر کے داخلی زاویوں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔

(۱۶) ک کی قیمت معلوم کرو جبکہ مساوات ۲لا² + ک لاما - ۲ما² - ۸لا + ۴ما = ۰ دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرے۔ ان خطوں کی جداگانہ مساواتیں معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ خطوط باہم علی القوائم ہیں:-

جواب: ک = ۳، ما = ۲لا، لا + ۲ما = ۴

(۱۷) ایک مثلث کے تین اضلاع کی مساواتیں

لا - ۴ما = ۴، ۲لا + ما = ۴، ما - لا = ۲

ہیں۔ اس مثلث کے اندرونی زاویے معلوم کرو۔

جواب: ۵۱°، ۳۱°، ۹۷° تقریباً۔

(۱۸) درجۂ دوم کی دو مساواتوں ۳ لا^{۲} + ۱۳ لا ما − ۵۹ ما^{۲} − ۲۰ لا + ۲۳۶ ما − ۲۴۷ = ۰ اور ۲ لا^{۲} − لا ما − ما^{۲} − ۲۹ لا + ۱۴ ما + ۹۵ = ۰ سے چار خط حاصل ہوتے ہیں جو ایک چار ضلعی شکل بناتے ہیں ثابت کرو کہ ان خطوں کے نقاطِ وسطی کو ملانے سے ایک متوازی الاضلاع حاصل ہوتا ہے۔

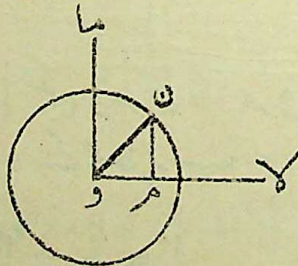
(۱۹) ایک مثلث کے راس (۰، ۳)، (۴، −۳)، (۳، ۵) ہیں۔ اس مثلث کے اندرونی زاویے معلوم کرو۔

جواب: ۹۰°، ۲۶° ۳۰′، ۶۳° ۳۰′

(۲۰) اگر ایک متوازی الاضلاع کے وتر مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ یہ ایک مستطیل ہوگی۔

دائرہ

۳٫۱ - **تعریف** - اگر ایک نقطہ اس طرح حرکت کرے کہ ایک ثابت نقطے سے اس کا فاصلہ ہمیشہ مستقل رہے تو اس نقطے کے طریق کو "دائرہ" ثابت نقطہ کو "مرکز" اور مستقل فاصلہ کو "نصف قطر" کہتے ہیں۔

۳٫۲ - **دائرہ کی مساوات** (مرکز کو مبداء مان کر)۔ فرض کرو کہ دائرہ کا مرکز و ہے اور نصف قطر ل۔

فرض کرو کہ ولا اور وما حوالہ کے علی القوائم محور ہیں اور ن دائرہ کے محیط پر کوئی نقطہ ہے جس کے محدد (لا، ما) ہیں۔ ولا پر عمود ن م ڈالو اور

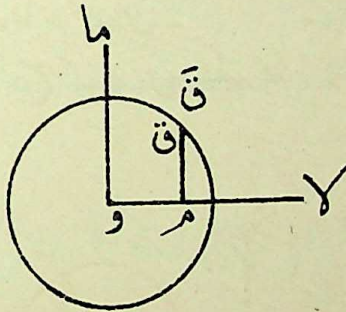
ون کو ملاؤ تو

وم^2 + من^2 = ون^2

لیکن ون = ر، وم = لاَ، من = ما اس لیے

لا^2 + ما^2 = ر^2 ...... (۱)

دائرہ کی مطلوبہ مساوات یہی ہے اور یہ سادہ ترین شکل میں ہے۔ اس کو دائرہ کی "معیاری مساوات" بھی کہتے ہیں۔ہم دیکھتے ہیں کہ یہ ایک دوسرے درجہ کی مساوات ہے لیکن متجانس نہیں ہے۔

۲۱ء۳ ـ ہم معلوم کرنا چاہتے ہیں کہ اگر ایک نقطہ ق دائرہ کے محیط پر واقع نہ ہو بلکہ اس کے اندر یا باہر کہیں واقع ہو تو محدّدوں میں کیا رشتہ ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ نقطہ ق دائرہ کے اندر واقع ہے اور اس کے محدّد (لاَ، ماَ) ہیں۔

نقطہ ق سے ولا پر عمود ق مر ڈالو اور مر ق کو خارج کرو کہ دائرہ کے محیط سے نقطہ قَ پر ملے۔

فرض کرو کہ مر قَ = ما لیکن وم = لاَ، مر ق = ماَ

تو چونکہ نقطہ قَ دائرہ کے محیط پر ہے اس لیے

لاَ^{2} + ما^2 = ر^2

لیکن مر ق > مر قَ یعنے ماَ > ما اس لیے

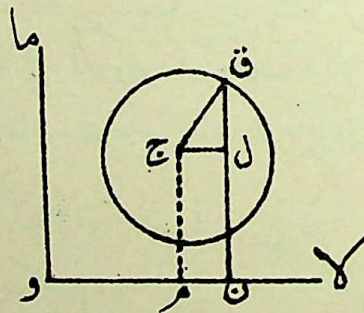
لاَ^{2} + ماَ^{2} > ر^2 یعنے لاَ^{2} + ماَ^{2} ـ ر^2 > ۰

اسی طرح شکل بنا کر آسانی سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اگر نقطہ ق (لاَ، ماَ) دائرہ کے باہر واقع ہے تو

$$\text{لاَ}^2 + \text{ماَ}^2 > \text{ل}^2 \quad \text{یعنے} \quad \text{لاَ}^2 + \text{ماَ}^2 - \text{ل}^2 > ۰$$

پس کسی نقطہ (لاَ، ماَ) کے متعلق یہ معلوم کرنا ہو کہ وہ دائرہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ل}^2$ کے لحاظ سے کہاں واقع ہے تو جملہ $\text{لاَ}^2 + \text{ماَ}^2 - \text{ل}^2$ کی قیمت دریافت کرنی چاہیے۔ اگر یہ قیمت مثبت ہو تو نقطہ دائرہ کے باہر واقع ہے، اگر قیمت صفر ہو تو نقطہ دائرہ کے محیط پر واقع ہے اور اگر قیمت منفی ہو تو نقطہ دائرہ کے اندر واقع ہے۔

۳،۲۲- کسی قائم محوروں کے لحاظ سے دائرہ کی مساوات۔

فرض کرو کہ و لا اور و ما دو قایم محور ہیں۔
فرض کرو کہ دائرہ کا مرکز ج ہے جس کے محدّد (ھ، ک) ہیں اور نصف قطر ل ہے۔

دائرہ کے محیط پر کوئی نقطہ ق لو اور فرض کرو کہ اس کے محدّد (لا، ما) ہیں۔ محور و لا پر عمود ج م اور ق ن ڈالو۔
ن ق پر عمود ج ل ڈالو۔ اب

ج ل = م ن = و ن - و م = لا - ھ،

اور

ل ق = ن ق - ن ل = ن ق - م ج = ما - ک ۔

پس چونکہ

ج ل۲ + ل ق۲ = ج ق۲

اس لیے

(لا - ھ)۲ + (ما - ک)۲ = ر۲ .... (۱)

جو مطلوبہ مساوات ہے۔ اس کو پھیلا کر یوں لکھ سکتے ہیں

لا۲ + ما۲ - ۲ ھ لا - ۲ ک ما + ھ۲ + ک۲ - ر۲ = ۰ .... (۲)

یہ دائرہ کی عام مساوات ہے۔ اس کے دیکھنے سے فوراً معلوم ہوتا ہے کہ یہ مساوات درجہ دوم کی غیر متجانس ہے جس میں لا۲ اور ما۲ کے سر مساوی ہیں اور لا ما والی رقم موجود نہیں ہے۔ یعنی لا ما کا سر صفر ہے۔

اس کے برعکس ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ کوئی دوسرے درجہ کی مساوات جس میں یہ خاصیتیں پائی جائیں یعنے جس میں لا۲ اور ما۲ کے سر مساوی ہوں اور لا ما والی رقم موجود نہ ہو ایک دائرہ کو تعبیر کرتی ہے۔

اس طرح کی عام سے عام مساوات ذیل کی شکل کی ہوگی:-

لا۲ + ما۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ .... (۳)

اس کو ہم یوں بھی لکھ سکتے ہیں:-

(لا + گ)۲ + (ما + ف)۲ = گ۲ + ف۲ - ج .... (۴)

مساوات (۴) کا مساوات (۱) کے ساتھ مقابلہ کرنے سے ظاہر ہے کہ یہ ایک دائرہ کی مساوات ہے جس کا مرکز نقطہ (-گ، -ف) ہے اور جس کا نصف قطر $\sqrt{}$ گ۲ + ف۲ - ج کے مساوی ہے۔

۳،۲۳ :-

جس طرح دائرہ کی معیاری شکل کے لیے دفعہ ۲۱،۳ میں ہم نے شرط معلوم کی تھی کہ ایک نقطہ ن (لاَ، ماَ) ویسے ہوئے دائرہ لا^2 + ما^2 = ر^2 کے اندر یا باہر کب واقع ہوتا ہے اسی طرح دائرہ کی عام مساوات

لا^2 + ما^2 + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰ .... (۱)

کے لیے بھی ہم اسی طرح کی شرط معلوم کر سکتے ہیں۔ گذشتہ دفعہ کی مساوات (۴) کی رُو سے (۱) کو یوں بھی لکھ سکتے ہیں :-

(لا + گ)^2 + (ما + ف)^2 = گ^2 + ف^2 − ج .... (۲)

اب مبداء کو دائرہ کے مرکز (−گ، −ف) پر منتقل کرو اور محوروں کو پُرانے محوروں کے متوازی رکھو۔ اس لیے دفعہ ۱۹،۱ (الف) کے بموجب نئے محددوں (لاٗ، ماٗ) اور پُرانے محددوں (لا، ما) میں ذیل کا رشتہ ہوتا ہے :-

لاٗ = لا + گ، ماٗ = ما + ف .... (۳)

اسی طرح دیے ہوئے نقطہ ن (لاَ، ماَ) کے محدد بدل کر (لاٗ، ماٗ) ہو جائینگے جہاں

لاٗ = لاَ + گ، ماٗ = ماَ + ف .... (۴)

دائرہ کی مساوات (۲) میں (۳) درج کرنے پر نئے محددوں میں مساوات ہو جاتی ہے

لاٗ^{2} + ماٗ^{2} = گ^2 + ف^2 − ج .... (۵)

اب یہ معلوم کرنے کے لیے کہ دیا ہوا نقطہ ن (لاٗ، ماٗ) دائرہ (۵) کے اندر

یا باہر واقع ہے ہم دفعہ ۱۲۱۳ کے نتیجہ کو استعمال کر سکتے ہیں جس سے حاصل ہوتا ہے کہ نقطہ ن دائرہ کے اندر یا باہر واقع ہے بموجب اس کے کہ

$$لَا^2 + مَا^2 - (گ^2 + ف^2 - ج) \gtreqless ۰$$

یعنی (۴) سے لَا، مَا کی قیمتیں درج کرنے پر ملتا ہے کہ ن دائرہ کے اندر یا باہر واقع ہے بموجب اس کے کہ

$$(لَا + گ)^2 + (مَا + ف)^2 - (گ^2 + ف^2 - ج) \gtreqless ۰$$

یعنی بموجب اس کے کہ

$$لَا^2 + مَا^2 + ۲گ\,لَا + ۲ف\,مَا + ج \gtreqless ۰ \quad (۲)$$

غرض کہ اگر نقطہ (لَا، مَا) دائرہ کے اندر واقع ہو تو

$لَا^2 + مَا^2 + ۲گ\,لَا + ۲ف\,مَا + ج$ کو منفی ہونا چاہیے اور اگر نقطہ (لَا، مَا) دائرہ کے باہر واقع ہو تو

$لَا^2 + مَا^2 + ۲گ\,لَا + ۲ف\,مَا + ج$ کو مثبت ہونا چاہیے۔

اس طرح دائرہ کی مساوات میں صرف نقطہ کے محدد درج کرنے پر ہمیں معلوم ہو جاتا ہے کہ نقطہ دائرہ کے اندر یا باہر یا محیط پر واقع ہے۔

مثال (۱) اس دائرہ کی مساوات دریافت کرو جس کا نصف قطر ۳ ہے اور جس کا مرکز نقطہ (−۱، ۲) ہے۔

اس کے لیے ہم مساوات (۱) استعمال کرتے ہیں جس میں ھ = −۱، ک = ۲ اور ا = ۳

{لا - (۱-)}^{2} + {ما - ۲}^{2} = (۳)^{2}

یعنی (لا + ۱)^{2} + (ما - ۲)^{2} = ۹

یعنی لا^{2} + ما^{2} + ۲لا - ۴ما - ۴ = ۰

مطلوبہ مساوات ہے۔

مثال (۲) مساوات لا^{2} + ما^{2} + ۱۰لا + ۱۲ما - ۳۹ = ۰ سے تعبیر ہونے والے دائرہ کے مرکز کے محدد اور نصف قطر کا طول معلوم کرو۔

دی ہوئی مساوات کو ہم یوں لکھ سکتے ہیں۔

(لا + ۵)^{2} + (ما + ۶)^{2} = ۳۹ + ۲۵ + ۳۶

= ۱۰۰ = (۱۰)^{2}

اب مساوات (۱) سے مقابلہ کرنے پر ظاہر ہے کہ مرکز کے محدد (-۵، -۶) ہیں اور نصف قطر کا طول ۱۰ ہے۔

مثال (۳) اُس دائرہ کی مساوات دریافت کرو جو تین نقطوں (۱، ۲)، (۳، -۴) اور (۵، -۶) میں سے گزرتا ہے۔

فرض کرو کہ مطلوبہ دائرہ کی مساوات

لا^{2} + ما^{2} + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰

ہے اب چونکہ یہ دائرہ دیئے ہوئے تین نقطوں میں سے گزرتا ہے اس لیے تینوں نقطوں کے محدد اس مساوات کو پورا کرینگے جس سے گ، ف اور ج کی قیمت معلوم کرنے کے لیے ہم کو تین ہمزاد مساواتیں حاصل ہوتی ہیں:-

۲گ + ۴ف + ج = -۵

۶گ - ۸ف + ج = -۲۵

۱۰گ - ۱۲ف + ج = -۶۱

معمولی طریقہ سے ان مساواتوں کو حل کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$گ = -۱۱ ،\ ف = -۲ ،\ ج = ۲۵$$

اور اس لیے مطلوبہ دائرہ کی مساوات ہے

$$لا^{۲} + ما^{۲} - ۲۲\,لا - ۴\,ما + ۲۵ = ۰$$

مثال (۴) اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو نقاط ا (۱، ۲) ب (-۳، ۵) کو ملانے والے خط کو قطر مان کر کھینچا جائے۔

فرض کرو کہ دائرہ کے محیط پر کوئی نقطہ ن (لا، ما) ہے تو چونکہ زاویہ ب ن ا قائمہ ہے اس لیے ظاہر ہے کہ

$$ب ن^{۲} + ا ن^{۲} = ب ا^{۲}$$

یعنی $\left[\{لا - (-۳)\}^{۲} + \{ما - ۵\}^{۲}\right] + \left[\{لا - ۱\}^{۲} + \{ما - ۲\}^{۲}\right] = \{۱ - (-۳)\}^{۲} + \{۵ - ۲\}^{۲}$

یعنی $لا^{۲} + ۶\,لا + ۹ + ما^{۲} - ۱۰\,ما + ۲۵ + لا^{۲} - ۲\,لا + ۱ + ما^{۲} - ۴\,ما + ۴ = ۴^{۲} + ۳^{۲}$

یعنی $۲\,لا^{۲} + ۲\,ما^{۲} + ۴\,لا - ۱۴\,ما + ۱۴ = ۰$

یعنی $لا^{۲} + ما^{۲} + ۲\,لا - ۷\,ما + ۷ = ۰$

یعنی $(لا + ۱)^{۲} + (ما - \frac{۷}{۲})^{۲} = ۱ + \frac{۴۹}{۴} - ۷ = \frac{۲۵}{۴}$

اس آخری مساوات سے ظاہر ہے کہ دائرہ کا مرکز $(-۱ ،\ \frac{۷}{۲})$ اور نصف قطر $\frac{۵}{۲}$ ہے۔

مشق ۱۰

(۱) اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو:-

(ا) جس کا نصف قطر ا اور مرکز (۰، ـا) ہے۔

(ب) نصف قطر $\frac{۷}{۲}$، مرکز (ـ۳، $\frac{۳}{۲}$)

(ج) نصف قطر $\frac{۳}{۲}$، مرکز (ـ$\frac{۱}{۲}$، ۱)

(د) جس کا نصف قطر ا + ب اور مرکز (ا، ـب) ہے

جواب (ا) لا^2 + ما^2 + ۲ ما = ۰۔

(ب) لا^2 + ما^2 + ۶ لا ـ ۳ ما ـ ۱ = ۰۔

(ج) لا^2 + ما^2 + لا ـ ۲ ما ـ ۱ = ۰۔

(د) لا^2 + ما^2 ـ ۲ ا لا + ۲ ب ما ـ ۲ اب = ۰۔

(۲) ذیل کی مساواتوں سے ہونے والے دائروں کے نصف قطر اور مرکزوں کے محدد معلوم کرو:۔

(ا) لا^2 + ما^2 ـ ۸ لا + ۱۰ ما + ۵ = ۰۔

(ب) ۳ لا^2 = ما (۷ ـ ۳ ما)

(ج) (لا ـ ۲)(لا ـ ۴) + (ما ـ ۳)(ما ـ ۵) = ۰۔

(د) ۷ لا^2 + ۳ ما^2 ـ ۴ ما = (۱ ـ ۲ لا)^2

(ہ) ۴ لا^2 + ۴ ما^2 ـ ۴ لا ـ ۵ ما + ۱ = ۰۔

(و) (لا ـ ما + ا)^2 + (لا + ما ـ ا)^2 = ۲ ا^2

جواب (ا) ۶، (۴، ـ۵)؛

(ب) $\frac{۷}{۶}$، (۰، $\frac{۷}{۶}$)؛

(ج) $\sqrt{۲}$، (۳، ۴)؛

(د) $\frac{\sqrt{۱۱}}{۳}$، (ـ$\frac{۲}{۳}$، $\frac{۲}{۳}$)؛

(ہ) $\frac{۵}{۸}$، ($\frac{۱}{۲}$، $\frac{۵}{۸}$)؛

(و) ا، (۰، ا)؛

(۳) اُن دائروں کی مساواتیں معلوم کرو جو ذیل کے نقطوں میں سے گزرتے ہیں:

(ا) (۱، ۱)، (۲، ۔۱)، اور (۳، ۲) ۔

(ب) (۰، ۰)، (۲، ۰)، (۰، ۔۳) ۔

(ج) (۱، ۶)، (۳، ۲) اور (۲، ۳) ۔

(د) (۰، ۱)، (۱، ۰) اور (۲، ۱) ۔

جواب (ا) لا۲ + ما۲ ۔ ۵ لا ۔ ما + ۴ = ۰

(ب) لا۲ + ما۲ ۔ ۲ لا + ۳ ما = ۰

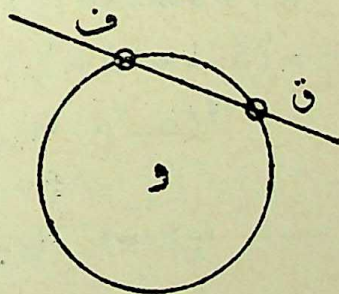
(ج) لا۲ + ما۲ ۔ ۱۲ لا ۔ ۱۲ ما + ۴۶ = ۰

(د) لا۲ + ما۲ ۔ ۲ لا ۔ ۲ ما + ۱ = ۰

(۴) اُس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو مبداء میں سے گزرتا ہے اور محوروں پر جس کے مقطوعے ۳ اور ۴ ہیں ۔

جواب لا۲ + ما۲ ۔ ۳ لا ۔ ۴ ما = ۰

۳،۳ ۔ دائرہ کے وتر کی مساوات :۔

فرض کرو کہ ایک دائرہ پر ف اور ق دو نقطے ہیں ۔ دائرہ کی مساوات کو ہم معیاری شکل میں لیتے ہیں یعنی لا۲ + ما۲ = ا۲ .... (۱)

اب اگر ف اور ق کے محدّد بالترتیب (لا۱، ما۱) اور (لا۲، ما۲) ہیں تو یہ دونوں دائرہ کی مساوات کو پورا کرینگے یعنی

$$\left.\begin{array}{l} لا_1^2 + ما_1^2 = ا^2 \\ لا_2^2 + ما_2^2 = ا^2 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

اس لیے تفریق کرنے پر

$$(\text{لا}_2^2-\text{لا}_1^2)+(\text{ما}_2^2-\text{ما}_1^2)=0$$

یعنی

$$(\text{لا}_2-\text{لا}_1)(\text{لا}_2+\text{لا}_1)=-(\text{ما}_2-\text{ما}_1)(\text{ما}_2+\text{ما}_1)$$

یعنی

$$\frac{\text{لا}_2-\text{لا}_1}{\text{ما}_2-\text{ما}_1}=-\frac{\text{ما}_2+\text{ما}_1}{\text{لا}_2+\text{لا}_1}\quad\ldots\ldots(3)$$

ہم کو معلوم ہے کہ دو نقطوں ف اور ق کو ملانے والے خط کی مساوات حسبِ ذیل ہوتی ہے۔

$$\frac{\text{لا}-\text{لا}_1}{\text{لا}_2-\text{لا}_1}=\frac{\text{ما}-\text{ما}_1}{\text{ما}_2-\text{ما}_1}$$

یعنی

$$\frac{\text{لا}-\text{لا}_1}{\text{ما}-\text{ما}_1}=\frac{\text{لا}_2-\text{لا}_1}{\text{ما}_2-\text{ما}_1}\quad\ldots\ldots(4)$$

مساوات (۴) کسی دو نقطوں کو ملانے والے خط کی مساوات ہے چاہے وہ کہیں واقع ہوں۔ لیکن زیرِ بحث صورت میں نقطے ف اور ق خاص طرح کے ہیں۔ یعنی دائرہ کے محیط پر واقع ہیں۔ پس وتر ف ق کی مساوات دریافت کرتے وقت ہم کو یہ امر بھی ملحوظ رکھنا چاہیے۔ اس کے لیے ہم مساوات (۳) کو استعمال کرتے ہیں اور اس میں سے $\frac{\text{لا}_2-\text{لا}_1}{\text{ما}_2-\text{ما}_1}$ کی قیمت مساوات (۴) میں بھرتی کرتے ہیں جس سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{لا}-\text{لا}_1}{\text{ما}-\text{ما}_1}=-\frac{\text{ما}_2+\text{ما}_1}{\text{لا}_2+\text{لا}_1}\quad\ldots\ldots(5)$$

چلیپی ضرب دینے اور سب رقموں کو سیدھی طرف لے جانے پر ملتا ہے

$$(\text{لا}-\text{لا}_1)(\text{لا}_1+\text{لا}_2)+(\text{ما}-\text{ما}_1)(\text{ما}_1+\text{ما}_2)=0\quad\ldots\ldots(6)$$

یہ دائرہ کے وتر کی مساوات ہے جو ایک متشاکل صورت میں ہے۔

مثال۔ دائرہ $\text{لا}^2+\text{ما}^2=25$ پر دو نقطے ا (−۳، ۴) اور ب (۴، ۳) ہیں

ان کو ملانے والے وتر کی مساوات دریافت کرو ۔
نقاط ا اور ب کو ملانے والے خط کی مساوات حسبِ ذیل ہے :-

(لا − (−۳)) / (−۳ − ۴) = (ما − ۴) / (۴ − ۳) ۔ یعنے (لا + ۳)(۴ − ۳) + (ما − ۴)(۴ + ۳) = ۰

یعنے لا + ۳ = −۷(ما − ۴) یعنے (لا + ۳) + ۷(ما − ۴) = ۰ ۔

یعنے لا + ۷ما = ۲۵

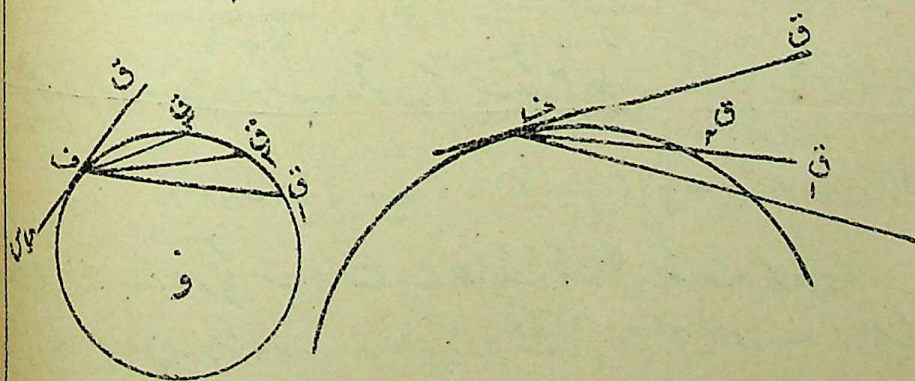
یہ وترِ ا ب کی مطلوبہ مساوات ہے جو مساوات (۶) سے بھی حاصل کی جا سکتی ہے ۔

مشاہدہ : وتر کی مساوات کو ہم یوں بھی لکھ سکتے ہیں :

(لا − لا۱)(لا − لا۲) + (ما − ما۱)(ما − ما۲) = لا² + ما² − ر² ...... (۷)

اس مساوات میں دونوں طرف سے لا² اور ما² کے سر کٹ جاتے ہیں اس لیے دراصل یہ صرف پہلے درجہ کی مساوات ہے اور مساواتوں (۲) سے ظاہر ہے کہ نقاط ف اور ق کے مجدّد (لا۱، ما۱) اور (لا۲، ما۲) مساوات (۷) کو پورا کرتے ہیں اس لیے یہ خط نقاط ف اور ق میں سے گزرتا ہے یعنے مطلوبہ وتر ہے ۔

وتر کی مساوات کو لکھنے کا یہ طریقہ عام ہے اور یہ دوسرے درجہ کے منحنی کے لیے یعنے ہر مخروطی کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے ۔

۳۴ ۔ مماس ۔ تعریف ۔ ذیل کی شکل میں ہم دیکھتے ہیں کہ ف اور ق

دائرہ یا کسی منحنی پر کے دو نقطے ہیں اور ان کو ملانے والا خط دائرہ یا منحنی کا وتر ہے۔ اب چاہے ق کہیں واقع ہو یہ خط دائرہ یا منحنی کا وتر ہوگا۔ فرض کرو کہ ق کو ہم دائرہ یا منحنی کے محیط پر ف کے قریب بتدریج لاتے ہیں۔ جس وقت ق نقطہ ف کے اس قدر نزدیک آجائے کہ اس پر عین منطبق ہونے کو ہو تو اس انتہائی صورت میں جو خط حاصل ہوتا ہے اس کو دائرہ یا منحنی کا مماس کہتے ہیں۔

شکل بالا سے اس کی کافی وضاحت ہوتی ہے۔ مماس کا مفہوم بہت اہم ہے اور طالب علم کو اسے نہایت غور و احتیاط کے ساتھ سمجھنا چاہیے۔ اس کا بنیادی اصول دراصل ایک تفاعل کی انتہا کے مفہوم پر منحصر ہے جو تفرقی احصاء میں تفصیل کے ساتھ بتایا جاتا ہے۔

۱۴ء۳ ۔ دائرہ کے مماس کی مساوات:۔

اس مساوات کو اوپر کی تعریف کے بموجب ہم وتر کی مساوات سے اخذ کر سکتے ہیں۔

دفعہ (۱۳ء۳) کی مساوات (۶) میں ہم نے وتر ف ق کی مساوات شکل ذیل میں حاصل کی تھی:

(لا - لا۱) (لا۲ + لا۱) + (ما - ما۱) (ما۲ + ما۱) = ۰ .... (۱)

اب ظاہر ہے کہ جب نقطہ ق نقطہ ف پر عین منطبق ہونے کو ہوگا تو لا۲ کی قیمت لا۱ کے قریب اور ما۲ کی قیمت ما۱ کے قریب آئیگی۔

پس مساوات (۱) میں لا۲ کی بجائے لا۱ اور ما۲ کی بجائے ما۱ رکھنے پر وہ ہو جاتی ہے:

(لا - لا۱) (۲ لا۱) + (ما - ما۱) (۲ ما۱) = ۰

یعنی

لا۱ (لا - لا۱) + ما۱ (ما - ما۱) = ۰ .... (۲)

یہ مماس کی مساوات ہے لیکن ابھی یہ مطلوبہ شکل میں نہیں ہے۔ مساوات (۲) سے حاصل ہوتا ہے۔

لالا + ہاہا − لا^{2} − ہا^{2} = ۰

یعنی

لالا + ہاہا = لا^{2} + ہا^{2} .... (۳)

لیکن (لا، ہا) نقطۂ ف کے محدّد ہیں جو دائرہ پر واقع ہے اس لیے یہ دائرہ کی مساوات کو پورا کرتے ہیں یعنی

لا^{2} + ہا^{2} = ر^{2} .... (۴)

اس قیمت (۴) کو مساوات (۳) میں درج کرنے پر حاصل ہوتا ہے،

لالا + ہاہا = ر^{2} .... (۵)

یہی مماس کی مطلوبہ مساوات ہے۔ اس کو یاد رکھنے کے لیے ہم ذیل کی ترکیب اختیار کر سکتے ہیں:۔

دائرہ کی مساوات لا^{2} + ہا^{2} = ر^{2} کو پھیلا کر اس شکل میں لکھو

لا × لا + ہا × ہا = ر^{2}

پھر اس میں سیدھی طرف ایک لا کی بجائے لا اور ایک ہا کی بجائے ہا رکھو تو

لالا + ہاہا = ر^{2}

حاصل ہو جاتا ہے۔ یہ قاعدہ عام ہے اور آگے چل کر ہم دیکھینگے کہ تمام مخروطیوں کے مماس کی مساوات اس طرح اخذ کی جا سکتی ہے۔

مماس کی یہی مساوات وتر کی مساوات (۷) (دفعہ ۳۳) سے بھی حاصل کی جا سکتی ہے:۔

چونکہ لا۱ کی قیمت لا کے قریب اور ما۱ کی قیمت ما کے قریب آتی ہے اس لیے مماس کی مساوات حسبِ ذیل ہے

(لا − لا۱) (لا − لا۱) + (ما − ما۱) (ما − ما۱) = لا^۲ + ما^۲ − ر^۲

یعنے −۲ لالا۱ − ۲ ماما۱ + لا۱^۲ + ما۱^۲ = − ر^۲

مگر چونکہ لا۱^۲ + ما۱^۲ = + ر^۲ کیونکہ نقطہ (لا۱، ما۱) دائرہ پر واقع ہے نقطہ (لا۱، ما۱) پر کے مماس کی مساوات حسبِ سابق

لالا۱ + ماما۱ = ر^۲

ہے

مثال ۔ دائرہ لا^۲ + ما^۲ = ۲۵ کے نقطہ ن (۴، −۳) پر کے مماس کی مساوات دریافت کرو ۔

فرض کرو کہ دائرہ پر ایک اور نقطہ نَ (۴ + ھ، −۳ + ک) واقع ہے جو نقطہ ن کے بہت قریب ہے یعنے ھ اور ک بہت چھوٹے عدد ہیں ۔ وتر ن نَ کی مساوات ہوگی

(لا − ۴) / (۴ + ھ − ۴) = (ما + ۳) / (−۳ + ک + ۳) یعنے (لا − ۴) / ھ = (ما + ۳) / ک (۶)

ن پر کے مماس کی مساوات حاصل کرنے کے لیے نقطہ نَ کو ن کے عین منطبق ہونے تک قریب لانا چاہیے یعنے ھ اور ک کو اس قدر چھوٹا کرنا چاہیے کہ وہ عین صفر ہونے کو ہوں لیکن بالکل صفر نہ ہوں ۔ مگر چونکہ نقطہ نَ بہرحال دائرہ پر واقع ہے اس لیے

(۴ + ھ)^۲ + (−۳ + ک)^۲ = ۲۵

یعنے ۸ھ − ۶ک + ھ^۲ + ک^۲ = ۰

لیکن چونکہ ھ اور ک جس قدر چاہیں چھوٹے ہو سکتے ہیں اس لیے ھ^۲ اور ک^۲ کو

نظر انداز کیا جا سکتا ہے، پس

$$8\,\text{ھ} - 6\,\text{ک} = 0 \quad \text{یعنی} \quad \text{ھ} = \frac{6}{8}\,\text{ک} = \frac{3}{4}\,\text{ک} \quad \ldots\ldots (7)$$

پس مماس کی مساوات حاصل کرنے کے لیے ھ اور ک میں یہ رشتہ مساوات (۶) میں درج کرنا چاہیے

$$\frac{\text{لا} - 4}{\frac{3}{4}\,\text{ک}} = \frac{\text{ما} + 3}{\text{ک}} \quad \text{یعنی} \quad 4\,\text{لا} - 3\,\text{ما} = 25$$

ضابط (۵) میں $\text{لا}_1 = 4$ اور $\text{ما}_1 = -3$، $\text{ر}^2 = 25$ رکھنے پر بھی یہی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

۲۴۳۔ مماس کی مساوات معلوم کرنے کے مذکورۂ بالا طریقہ کو واضح کرنے کے لیے ہم عام شکل میں یہ مساوات دریافت کرینگے تاکہ یہ طریقہ طالب علم کے ذہن نشین ہو جائے۔

فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

$$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\,\text{گ}\,\text{لا} + 2\,\text{ف}\,\text{ما} + \text{ج} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

ہے اور اس کے محیط پر کوئی دو نقطے ف اور ق ہیں جن کے محدّد بالترتیب (لا_1، ما_1) اور (لا_2، ما_2) ہیں۔ چونکہ یہ دونوں نقطے دائرہ کی مساوات کو پورا کرتے ہیں اس لیے

$$\text{لا}_2^2 + \text{ما}_2^2 + 2\,\text{گ}\,\text{لا}_2 + 2\,\text{ف}\,\text{ما}_2 + \text{ج} = 0$$

$$\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 + 2\,\text{گ}\,\text{لا}_1 + 2\,\text{ف}\,\text{ما}_1 + \text{ج} = 0$$

پس تفریق کرنے پر

$$(\text{لا}_2^2 - \text{لا}_1^2) + (\text{ما}_2^2 - \text{ما}_1^2) + 2\,\text{گ}\,(\text{لا}_2 - \text{لا}_1) + 2\,\text{ف}\,(\text{ما}_2 - \text{ما}_1) = 0$$

یعنی

$$(\text{لا}_2 - \text{لا}_1)(\text{لا}_2 + \text{لا}_1 + 2\,\text{گ}) + (\text{ما}_2 - \text{ما}_1)(\text{ما}_2 + \text{ما}_1 + 2\,\text{ف}) = 0$$

یعنی

$$\frac{\text{لا}_2 - \text{لا}_1}{\text{ما}_2 - \text{ما}_1} = -\,\frac{\text{ما}_2 + \text{ما}_1 + 2\,\text{ف}}{\text{لا}_2 + \text{لا}_1 + 2\,\text{گ}} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

لیکن جیساکہ گذشتہ دفعہ کی مساوات (۴) سے ظاہر ہے کسی دو نقطوں ف اور ق کو ملانے والے خط کی مساوات حسب ذیل ہوتی ہے:

(لا − لا۱) / (ما − ما۱) = (لا۲ − لا۱) / (ما۲ − ما۱) .... (۳)

پس وتر ف ق کی مساوات معلوم کرنے کے لیے مساوات (۲) سے (لا۲ − لا۱) / (ما۲ − ما۱) کی قیمت مساوات (۳) میں درج کرتے ہیں جس سے حاصل ہوتا ہے

(لا − لا۱) / (ما − ما۱) = − (ما۱ + ما۲ + ۲ف) / (لا۱ + لا۲ + ۲گ)

یعنے (لا − لا۱) (لا۱ + لا۲ + ۲گ) + (ما − ما۱) (ما۱ + ما۲ + ۲ف) = ۰ (۴)

یہی اس عام صورت میں دائرہ کے وتر کی مساوات ہے۔

وتر کی اس مساوات سے مماس کی مساوات اخذ کرنے کے لیے ہم وہی استدلال کرتے ہیں جو اوپر معیاری صورت کے لیے کیا گیا تھا۔ یعنے نقطۂ ق کو بتدریج نقطۂ ف کے قریب لاتے ہیں اور انتہا میں جب نقطہ ق نقطہ ف پر عین منطبق ہونے کو ہو تو وتر کی مساوات میں لا۲ = لا۱ اور ما۲ = ما۱ رکھتے ہیں۔ اس لیے مساوات (۴) سے حاصل ہوگا

(لا − لا۱) (۲لا۱ + ۲گ) + (ما − ما۱) (۲ما۱ + ۲ف) = ۰ ...... (۵)

مساوات کو (۲) پر تقسیم کرنے اور پھیلانے سے حاصل ہوتا ہے

لالا۱ + ماما۱ + گ لا + ف ما − (لا۱^2 + ما۱^2 + گ لا۱ + ف ما۱) = ۰ ...... (۶)

لیکن چونکہ (لا۱، ما۱) دائرہ پر واقع ہے اس لیے

لا۱^2 + ما۱^2 + ۲گ لا۱ + ۲ف ما۱ + ج = ۰

یعنے لا۱^2 + ما۱^2 + گ لا۱ + ف ما۱ = − (گ لا۱ + ف ما۱ + ج) ...... (۷)

مساواتوں (۶) اور (۷) سے ملتا ہے:

لالا' + ماما' + گ لا + ف ما + گ لا' + ف ما' + ج = ۰

یعنے

لالا' + ماما' + گ (لا + لا') + ف (ما + ما') + ج = ۰ ......(۸)

اور یہی نقطہ ف پر کے مماس کی مطلوبہ مساوات ہے۔

اس عام صورت میں بھی ہم دفعہ ۳۴ کی مساوات (۷) کا طریقہ اختیار کر سکتے ہیں۔ دائرہ پر کے نقاط ف (لا'، ما') اور ق (لا''، ما'') میں سے گزرنے والے وتر کی مساوات حسبِ ذیل ہے:

(لا − لا') (لا − لا'') + (ما − ما') (ما − ما'') = لا² + ما² + ۲گ لا + ۲ف ما + ج (۹)

یہ ایک پہلے درجہ کی مساوات ہے اور نقاط ف، ق کے محدّد اس کو پورا کرتے ہیں اس لیے یہ وتر ف ق کی مساوات ہے۔

مماس کی مساوات حاصل کرنے کے لیے اس مساوات میں لا'' = لا'، ما'' = ما' رکھنے پر ملتا ہے۔

(لا − لا')² + (ما − ما')² = لا² + ما² + ۲گ لا + ۲ف ما + ج

یعنے

−۲ لالا' − ۲ ماما' + لا'² + ما'² = ۲گ لا + ۲ف ما + ج

لیکن چونکہ (لا'، ما') دائرہ پر واقع ہے اس لیے

لا'² + ما'² + ۲گ لا' + ۲ف ما' + ج = ۰۔ یعنے لا'² + ما'² = −۲گ لا' − ۲ف ما' − ج

پس نقطۂ (لا'، ما') پر کے مماس کی مساوات حسبِ ذیل حاصل ہوتی ہے:—

−۲ لالا' − ۲ ماما' − ۲گ (لا + لا') − ۲ف (ما + ما') − ۲ج = ۰

یعنے

لالا' + ماما' + گ (لا + لا') + ف (ما + ما') + ج = ۰

مثال۔ دائرہ لا² + ما² − ۵ لا − ما + ۴ = ۰ کے نقطۂ ن (۲، ۱) پر کے مماس کی مساوات دریافت کرو۔

فرض کرو کہ دائرہ پر ایک اور نقطہ نَ (۲ + ھ، -۱ + ک) واقع ہے جو پہلے نقطہ کے بہت قریب ہے۔ پس

(۲ + ھ)^۲ + (-۱ + ک)^۲ - ۵ (۲ + ھ) + (-۱ + ک) + ۴ = ۰

یعنی -ھ - ۳ک + ھ^۲ + ک^۲ = ۰ ....(۱۰)

لیکن ن نَ کو ملانے والے خط کی مساوات ہوگی

(لا - ۲) / (۲ + ھ - ۲) = (ہا + ۱) / (-۱ + ک + ۱) یعنی (لا - ۲) / ھ = (ہا + ۱) / ک (۱۱)

ن پر کے مماس کی مساوات حاصل کرنے کے لیے نَ کو ن کے قریب لانا چاہیے، یعنی ھ اور ک کو بہت چھوٹا کرنا چاہیے۔ اس صورت میں مساوات (۱۰) میں ھ^۲ اور ک^۲ کو نظر انداز کر سکتے ہیں جس سے وہ مساوات ہو جاتی ہے

ھ = -۳ک ....(۱۲)

مساوات (۱۱) میں یہ قیمت درج کرنے پر حاصل ہوتا ہے:

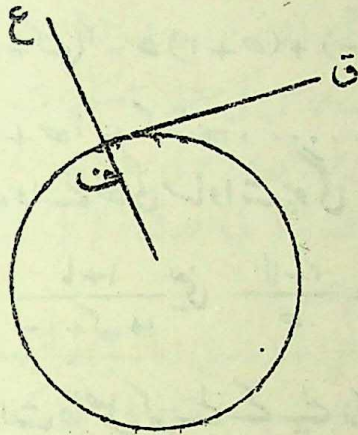
(لا - ۲) / (-۳ک) = (ہا + ۱) / ک یعنی (لا - ۲) + ۳(ہا + ۱) = ۰

یعنی مماس کی مطلوبہ مساوات لا + ۳ہا + ۱ = ۰ ہے جو ضابطہ (۸) میں لا = ۲ اور ہا = -۱ رکھنے پر بھی فوراً حاصل ہو سکتی ہے۔

۳،۴۳: عماد - تعریف:-

دائرہ اور بالعموم کسی منحنی کے عماد کی تعریف حسبِ ذیل کی جاتی ہے:

فرض کرو کہ ف دائرہ پر ایک نقطہ ہے۔ اور ف ق دائرہ کا مماس ہے۔

نقطہ ف میں سے ایک خط ف ع کھینچو جو مماس ف ق پر علی القوائم ہو۔

خط ف ع کو نقطۂ ف پر دائرہ کا عماد کہتے ہیں۔

عماد کی مساوات :-

اس تعریف کی بنا پر ہم دائرہ کے عماد کی مساوات آسانی سے حاصل کر سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

$$\text{لا}^2 + \text{ہا}^2 = \text{ر}^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ہے اور نقطۂ ف کے محدّد (لا₁، ہا₁) ہیں۔

مماس ف ق کی مساوات دفعہ (۱۴۱، ۳) میں ہم نے معلوم کی تھی

$$\text{لا}\,\text{لا}_1 + \text{ہا}\,\text{ہا}_1 = \text{ر}^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

اب ہم کو اس خط کی مساوات معلوم کرنا ہے جو نقطۂ (لا₁، ہا₁) میں سے گزرتا ہے اور خط (۲) پر علی القوائم ہے۔ اگر مطلوبہ خط کا زاویہ محور لا کے

ساتھ معلوم ہو جائے تو ہم اس کی مساوات فوراً لکھ سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ یہ زاویہ طہ ہے۔

دفعہ (۲،۱۳) میں ہم نے دیکھا کہ اگر ایک خط

$$\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج} = 0$$

کا زاویہ محور لا کے ساتھ عہ ہو تو

$$\text{مس عہ} = -\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$$

اب اگر خطِ مستقیم (۲) کو لیا جائے تو

$$\text{مس عہ} = -\frac{\text{لا}_1}{\text{ما}_1} \qquad \ldots\ldots (۳)$$

چونکہ عماد مماس پر علی القوائم ہے اس لیے

$$\text{مس طہ} = -\frac{1}{\text{مس عہ}}$$

$$= \frac{\text{ما}_1}{\text{لا}_1} \qquad \ldots\ldots (۴)$$

اب عماد کی مساوات ہم لکھ سکتے ہیں

$$\text{ما} - \text{ما}_1 = \text{مس طہ} \, (\text{لا} - \text{لا}_1)$$

$$= \frac{\text{ما}_1}{\text{لا}_1} (\text{لا} - \text{لا}_1)$$

$$\text{یعنے} \quad \text{لا}_1 (\text{ما} - \text{ما}_1) = \text{ما}_1 (\text{لا} - \text{لا}_1)$$

$$\text{یعنے} \quad \text{لا}_1 \text{ما} = \text{ما}_1 \text{لا} \qquad \ldots\ldots (۵)$$

$$\text{یعنے} \quad \frac{\text{لا}}{\text{لا}_1} = \frac{\text{ما}}{\text{ما}_1}$$

یہی عماد کی مطلوبہ مساوات ہے :- اس مساوات سے پتہ چلتا ہے کہ عماد مرکز میں سے گزرتا ہے کیونکہ مرکز یعنے مبداء کے محدّد (۰، ۰) مساوات کو پورا کرتے ہیں -

عماد کی یہ خصوصیت ہم کو ابتدائی علم ہندسہ سے بھی معلوم ہے کہ مرکز کو نقطۂ تماس سے ملانے والا نصف قطر مماس پر علی القوائم ہوتا ہے -

مشاہدہ - ہمیں عماد یعنی ایسے خط کی مساوات مطلوب ہے جو لا۱، ما۱ میں سے گزرتا ہے اور مماس لا لا۱ + ما ما۱ = ل۲ پر علی القوائم ہے - جیسا باب دوم دفعہ ۲،۲ میں بیان ہوا ایسے خط کی مساوات فوراً لکھی جا سکتی ہے -

(لا − لا۱) / لا۱ (یعنی مماس کی مساوات میں لا کا سر) = (ما − ما۱) / ما۱ (یعنی مماس کی مساوات میں ما کا سر)

یا بالعموم ایسے خط کی مساوات جو (لا۱، ما۱) میں سے گزرے اور ل لا + ب ما + ج = ۰ پر علی القوائم ہو یہ ہوگی (لا − لا۱) / ل = (ما − ما۱) / ب طالب علم تصدیق کرے -

مشق ۱۱

(۱) مذکورۂ بالا طریقہ سے دائرہ لا۲ + ما۲ + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰ کے عماد کی مساوات دریافت کرو اور تصدیق کرو کہ عماد مرکز کو نقطۂ تماس سے ملانے والا خط ہے -

جواب : (ما − ما۱) (لا۱ + گ) = (لا − لا۱) (ما۱ + ف)

(۲) دائرہ لا۲ + ما۲ = ۲۵ کے مماس کی مساوات نقطۂ (۳، ۴) پر معلوم کرو -

جواب : ۳ لا + ۴ ما = ۲۵

(۳) دائرہ لا۲ + ما۲ = ۱۶۹ کے مماسوں کی مساواتیں نقاط (۵، ۱۲) اور (۱۲، −۵) پر دریافت کرو اور بتاؤ کہ یہ دونوں مماس کس نقطہ پر قطع کرتے ہیں اور ان کا درمیانی

زاویہ کیا ہے۔

جواب: ۵لا + ۱۲ما = ۱۶۹، ۱۲لا − ۵ما = ۱۶۹ مماسوں کا نقطۂ تقاطع (۱۷، ۷) زاویہ قائمہ۔

(۴) مماس وہ خط ہے جو مرکز کو نقطۂ تماس سے ملانے والے نصف قطر پر عمود ہے۔ اس خاصیت کو استعمال کر کے دائرہ کے مماس کی مساوات اخذ کرو۔

(۵) سوال (۳) کے دائرہ کا عماد نقطۂ (۱۲، ۵) پر دریافت کرو۔

جواب: ۱۲لا − ۵ما = ۰۔

(۶) دائرہ لا۲ + ما۲ − ۳لا + ۴ما = ۲۰ کے نقطۂ (۲، −۳) پر کے مماس اور عماد کی مساوات دریافت کرو۔

جواب: ۳لا − ۴ما + ۱۲ = ۰، ۴لا + ۳ما + ۲ = ۰۔

(۷) دائرہ ۲لا۲ + ۲ما۲ − ۷لا + ۹ما = ۰ کے مبدا پر کے مماس اور عماد کی مساوات دریافت کرو۔

جواب: ۷لا − ۹ما = ۰، ۹لا + ۷ما = ۰۔

۵۳: دائرہ اور خطِ مستقیم کا تقاطع:—

علمِ ہندسہ سے ہم کو معلوم ہے کہ ایک خط دائرہ کو بالعموم دو نقطوں پر قطع کرتا ہے۔ اب ہم تحلیلی طور پر ان نقاطِ تقاطع کو معلوم کرینگے اور اسی کے ضمن میں یہ بھی دریافت کرینگے کہ دیا ہوا خط کس صورت میں دائرہ کو مس کرتا ہے۔

فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

لا۲ + ما۲ = ر۲ .... (۱)

ہے اور دیا ہوا خطِ مستقیم

ما = م لا + ج .... (۲)

ہے۔ اگر ان کا ایک نقطۂ تقاطع (لاَ، ماَ) ہے تو ظاہر ہے کہ یہ نقطہ دائرہ پر بھی واقع ہوگا اور خطِ مستقیم پر بھی۔ اس لیے اس کے محدّد دائرہ اور خطِ مستقیم دونوں کی مساواتوں کو ایک ساتھ پورا کرینگے۔ اس طرح دو مجہولوں لا اور ما کو

دریافت کرنے کے لیے ہمیں دو ہمزاد مساواتیں ملتی ہیں۔ ان سے حسبِ معمول ہم پہلے ایک مجہول کو ساقط کرکے دوسرے کی قیمت دریافت کرسکتے ہیں۔ اس لیے مساوات (۲) سے ما کی قیمت کو مساوات (۱) میں درج کرنے پر حاصل ہوتا ہے:

$$لا^2 + (م لا + ج)^2 = ل^2 \quad \ldots\ldots (۳)$$

$$\text{یعنے}\quad لا^2(۱+م^2) + ۲ م ج لا + ج^2 - ل^2 = ۰ \quad \ldots\ldots (۴)$$

ہم دیکھتے ہیں کہ لا میں یہ ایک دوسرے درجہ کی مساوات ہے اور اس سے ہم کو بالعموم لا کی دو قیمتیں $لا_1$ اور $لا_2$ ملتی ہیں جن کو ہم فوراً لکھ سکتے ہیں۔ پھر ہم کو ما کی دو قیمتیں ان کے مماثل حسبِ ذیل حاصل ہوتی ہیں:-

$$ما_1 = م لا_1 + ج$$

اور

$$ما_2 = م لا_2 + ج$$

اس طرح دو نقاطِ تقاطع $(لا_1، ما_1)$ اور $(لا_2، ما_2)$ مل جاتے ہیں۔

مشق: دائرہ $لا^2 + ما^2 = ۲$ اور خطِ مستقیم $ما = ۲ لا + ۱$ کے نقاطِ تقاطع کے محدد دریافت کرو۔

جواب: $(-۱، -۱)$ اور $(\frac{۱}{۵}، \frac{۷}{۵})$

اب مساوات (۴) پر ہم پھر غور کرتے ہیں۔ جبر و مقابلہ سے ہم کو معلوم ہے کہ اس مساوات کی دونوں اصلیں حقیقی ہونگی یا منطبق ہونگی یا خیالی ہونگی بموجب اس کے کہ جملہ

$$(م ج)^2 - (۱+م^2)(ج^2 - ل^2) \quad \ldots\ldots (۵)$$

کی قیمت مثبت ہو یا صفر ہو یا منفی ہو۔ پہلی صورت میں خطِ مستقیم دائرہ کو دو حقیقی نقطوں پر قطع کریگا، دوسری صورت میں بظاہر صرف ایک ہی نقطہ ملتا ہے لیکن اس کو ہم یوں سمجھ سکتے ہیں کہ یہ دراصل دو نقطے ہیں جو ایک دوسرے کے اس قدر قریب ہیں کہ ان میں امتیاز نہیں ہو سکتا۔ تیسری صورت میں

خطِ مستقیم دائرہ کو کسی حقیقی نقطوں پر قطع نہیں کرتا، یعنے خط بالکلیہ دائرہ کے باہر واقع ہوتا ہے، لیکن جن خیالی نقطوں پر یہ کاٹتا ہے ان کے محدّد مل سکتے ہیں۔

جملہ (۵) کو ہم اور سادہ شکل میں تحویل کرتے ہیں۔ اس کو پھیلانے پر

م^۲ ج^۲ ۔ ج^۲ ۔ م^۲ ج^۲ + ا^۲ (۱ + م^۲)

یعنے ا^۲ (۱ + م^۲) ۔ ج^۲ .... (۶)

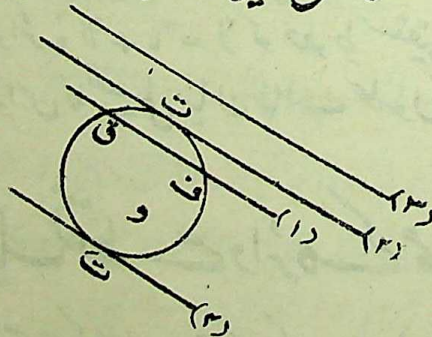
حاصل ہوتا ہے۔ تو گویا نقاطِ تقاطع کے حقیقی یا منطبق یا خیالی ہونے کے لیے شرط یہ ہے کہ

ا^۲ (۱ + م^۲) ۔ ج^۲ ⋛ ۰

یعنے یہ کہ

ج^۲ ⋚ ا^۲ (۱ + م^۲) .... (۷)

اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ اگر خطِ مستقیم کی مساوات میں م کی قیمت کو ثابت کر دیا جائے یعنے محور لا سے خط کا میلان مستقل رہے تو نقاطِ تقاطع کا حقیقی یا منطبق یا خیالی رہنا دراصل ج کی قیمت پر منحصر ہے۔

بالفاظِ دیگر بے شمار متوازی خطوں میں سے بعض خطِ دائرہ کو دو حقیقی نقطوں پر کاٹینگے۔ بعض دائرہ کے مماس ہونگے اور باقی بالکلیہ دائرہ کے باہر واقع ہونگے۔ اس کی توضیح ذیل کی شکل سے بخوبی ہوتی ہے۔

اس شکل میں چار متوازی خط ہیں جن میں سے (۱) دائرہ کو دو حقیقی نقطوں

ف اور ق پر قطع کرتا ہے۔ (۲) اور (۴) دائرہ کو بالترتیب نقاط ت اور تَ پر مس کرتے ہیں اور (۳) بالکلیہ دائرہ کے باہر واقع ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ متوازی خطوں کے ایک نظام میں سے صرف دو خط دائرہ کو مس کرتے ہیں۔ اِن دونوں مماسوں کے لیے ج کی قیمت شرط (۷) سے حاصل ہوتی ہے یعنے

$$ج^2 = ل^2(1 + م^2)$$

یا

$$ج = \pm ل\sqrt{1 + م^2} \quad \ldots\ldots (8)$$

اُوپر کی بحث میں ہم نے م کی قیمت کی کوئی تخصیص نہیں کی تھی یعنے خط کے میلان کو بالکل اختیاری رکھا تھا۔ ہم دیکھتے ہیں کہ م کی چاہے کچھ ہی قیمت ہو اگر ج کو (۸) میں سے کسی ایک قیمت کے مطابق منتخب کیا جائے تو یہ خط ضرور دائرہ کو مس کریگا یعنے خطِ مستقیم

$$ما = م لا \pm ل\sqrt{1 + م^2} \quad \ldots\ldots (9)$$

م کی ہر قیمت کے لیے دائرہ کو مس کریگا۔

م کو مختلف قیمتیں دینے سے خطوط (۹) کا ایک قبیل ملتا ہے اور ہمیں معلوم ہے کہ یہ تمام خط دائرہ $لا^2 + ما^2 = ل^2$ کو مس کرتے ہیں یعنے دائرہ ان میں سے ہر ایک خط کو مس کرتا ہے۔ اس خاصیت کی بناء پر اعلیٰ ریاضی میں دائرہ $لا^2 + ما^2 = ل^2$ کو خطوطِ مستقیم کے قبیل (۹) کا "لفاف" کہتے ہیں۔ اس کا تفصیلی بیان طالب علموں کو تفرقی احصاء میں ملیگا۔

۳،۵۱: ایک نقطہ سے دائرہ کے مماس:—

علم ہندسہ سے ہم کو معلوم ہے کہ ایک بیرونی نقطہ سے دائرہ کے دو مماس کھینچے جا سکتے ہیں اور اگر نقطہ خود دائرہ پر واقع ہو تو صرف

ایک ہی مماس کھینچا جا سکتا ہے اور اگر نقطہ دائرہ کے اندر ہو تو کوئی مماس نہیں کھینچا جا سکتا۔ اس کی تصدیق تحلیلی طور پر ہم بآسانی کر سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ کوئی نقطہ (لاَ، ماَ) ہے۔ ہم نے گذشتہ دفعہ میں دیکھا ہے کہ دائرہ کا کوئی مماس شکل

$$\text{ما} = \text{م}\,\text{لا} + \text{ل}\sqrt{1+\text{م}^2} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

کا ہوگا جہاں ایک خاص مماس حاصل کرنے کے لیے م کی ایک مناسب قیمت اختیار کرنی پڑتی ہے۔ پس کسی نقطۂ (لاَ، ماَ) میں گزرنے والے مماس کو دریافت کرنے کے لیے سوال یہی رہ جاتا ہے کہ م کی یہ قیمت معلوم کی جائے۔

فرض کرو کہ نقطۂ (لاَ، ماَ) میں سے کھینچا ہوا مماس خطِ مستقیم (۱) ہے تو چونکہ نقطۂ (لاَ، ماَ) اس خط پر واقع ہے اس لیے اس کے محدّد مساوات (۱) کو پورا کریں گے یعنی

$$\text{ما}' = \text{م}\,\text{لا}' + \text{ل}\sqrt{1+\text{م}^2} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

یا $\text{ما}' - \text{م}\,\text{لا}' = \text{ل}\sqrt{1+\text{م}^2}$

یا $(\text{ما}' - \text{م}\,\text{لا}')^2 = \text{ل}^2(1+\text{م}^2)$

یا م کی قوتوں کے لحاظ سے ترتیب دینے پر مساوات ہو جاتی ہے

$$\text{م}^2(\text{لا}'^2 - \text{ل}^2) - 2\,\text{م}\,\text{لا}'\,\text{ما}' + \text{ما}'^2 - \text{ل}^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

م میں یہ ایک دوسرے درجہ کی مساوات ہے اور اس لیے اس سے م کی بالعموم دو قیمتیں ملتی ہیں جس سے معلوم ہوتا ہے کہ نقطۂ (لاَ، ماَ) میں سے گزرنے والے بالعموم دو مماس ہوتے ہیں۔

اب مساوات (۲) سے م کی جو دو اصلیں حاصل ہوتی ہیں وہ

حقیقی ہونگی یا منطبق یا خیالی بموجب اس کے کہ جملہ

$$(\text{لاَ ماَ})^{۲} - (\text{لاَ}^{۲} - \text{اُ}^{۲})(\text{ماَ}^{۲} - \text{اُ}^{۲})$$

مثبت ہو یا صفر ہو یا منفی ہو یعنے بموجب اس کے کہ

$$\text{اُ}^{۲}(-\text{اُ}^{۲} + \text{لاَ}^{۲} + \text{ماَ}^{۲})$$

مثبت ہو یا صفر ہو یا منفی ہو یعنے بموجب اس کے کہ

$$\text{لاَ}^{۲} + \text{ماَ}^{۲} \gtreqless \text{اُ}^{۲} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۴)$$

اگر $\text{لاَ}^{۲} + \text{ماَ}^{۲} > \text{اُ}^{۲}$ تو ہم نے دفعہ (۳، ۲۱) میں دیکھا ہے کہ نقطہ (لاَ، ماَ) دائرہ کے باہر واقع ہے اور چونکہ اس صورت میں م کی دونوں اصلیں حقیقی ہیں اس لیے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ ایک بیرونی نقطہ سے دائرہ کے دو مماس کھینچے جا سکتے ہیں۔

اگر $\text{لاَ}^{۲} + \text{ماَ}^{۲} = \text{اُ}^{۲}$ تو نقطہ (لاَ، ماَ) دائرہ پر واقع ہے اور چونکہ اس صورت میں م کی دونوں اصلیں منطبق ہیں اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ دائرہ پر کے کسی نقطہ سے صرف ایک ہی مماس کھینچا جا سکتا ہے۔

اگر $\text{لاَ}^{۲} + \text{ماَ}^{۲} < \text{اُ}^{۲}$ تو دفعہ (۳، ۲۱) کے بموجب نقطہ دائرہ کے اندر واقع ہے اور چونکہ اس صورت میں م کی دونوں قیمتیں خیالی ہیں اس لیے معلوم ہوتا ہے کہ ایک اندرونی نقطہ سے دائرہ کا کوئی حقیقی مماس نہیں کھینچا جا سکتا۔

مثال (۱) ثابت کرو کہ خطِ مستقیم $۴\,\text{لا} + ۳\,\text{ما} - ۱۷ = ۰$ دائرہ $\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} - ۱۲\,\text{لا} - ۱۲\,\text{ما} + ۴۷ = ۰$ کو مس کرتا ہے۔ نقطۂ تماس کے محدد بھی معلوم کرو۔

خط کی مساوات سے ملتا ہے $\text{ما} = \frac{۱۷ - ۴\,\text{لا}}{۳}$

یہ قیمت دائرہ کی مساوات میں درج کرنے سے

لا² + ((۱۷ − ۴لا) / ۳)² − ۱۲لا − ۱۲ ((۱۷ − ۴لا) / ۳) + ۴۷ = ۰

یعنے پھیلانے پر اور مختصر کرنے پر حاصل ہوتا ہے۔

۲۵ لا² − ۱۰۰ لا + ۱۰۰ = ۰ یعنے (۵ لا − ۱۰)² = ۰، لا = ۲، ۲

اس مساوات کی دونوں اصلیں منطبق ہیں اس لیے معلوم ہوا کہ دیا ہوا خط دائرہ کو دو منطبق نقطوں پر کاٹتا ہے، یعنے دائرہ کا مماس ہے۔

اب چونکہ ما = (۱۷ − ۴لا) / ۳ = (۱۷ − ۴ × ۲) / ۳ = ۹ / ۳ = ۳

پس خط دائرہ کو نقطہ (۲، ۳) پر مس کرتا ہے۔

مثال ۲۔ دائرہ لا² + ما² − ۵لا − ما + ۴ = ۰ کے ان مماسوں کی مساواتیں دریافت کرو جو محور لا سے زاویہ طہ بناتے ہیں جہاں مس طہ = ۳ نیز نقاطِ تماس کے محدّد بھی معلوم کرو۔

محور لا سے زاویہ طہ بنانے والے عام خط کی مساوات

ما = مس طہ . لا + ک = ۳لا + ک ہوگی

اب ک کی ایسی قیمت معلوم کرنی چاہیے کہ یہ خط دائرہ کو مس کرے۔ اس کے لیے ظاہر ہے کہ مساوات

لا² + (۳لا + ک)² − ۵لا − (۳لا + ک) + ۴ = ۰

سے حاصل ہونے والی لا کی دونوں اصلیں منطبق ہونی چاہییں۔ مساوات کو پھیلا کر مختصر کرنے سے

۱۰لا² + ۲لا (۳ک − ۴) + (ک² − ک + ۴) = ۰

ملتا ہے۔ اگر اس مساوات کی دونوں اصلیں منطبق ہوں تو

۱۰ (ک² − ک + ۴) − (۳ک − ۴)² = ۰

یعنی ک۲ + ۱۴ک + ۲۴ = ۰

پس ک = -۲ یا ک = -۱۲

اس لیے دائرہ کے مطلوبہ مماسوں کی مساواتیں ہونگی

ما = ۳ لا - ۲، ما = ۳ لا - ۱۲

اب فرض کرو کہ مماس ما = ۳ لا - ۲ دائرہ کو نقطہ (ھ، ک) پر مس کرتا ہے۔ نقطہ (ھ، ک) پر دائرہ کے مماس کی مساوات ہوگی

$$\text{لا ھ + ما ک} - \frac{۵}{۲}(\text{لا + ھ}) - \frac{۱}{۲}(\text{ما + ک}) + ۴ = ۰$$

یعنی لا (۲ھ - ۵) + ما (۲ک - ۱) - ۵ھ - ک + ۸ = ۰

بموجب مفروض یہ مساوات اسی مماس کو تعبیر کرتی ہے جو مساوات ما = ۳لا - ۲ سے تعبیر ہوتا ہے اس لیے

$$\frac{\text{۲ھ - ۵}}{۳} = \frac{\text{۲ک - ۱}}{-۱} = \frac{\text{-۵ھ - ک + ۸}}{-۲}$$

ان ہمزاد مساواتوں کو حل کرنے سے ھ = ۱، ک = ۱ حاصل ہوتا ہے۔
پس مماس ما = ۳ لا - ۲ دیے ہوئے دائرہ کو نقطۂ (۱، ۱) پر مس کرتا ہے۔

اسی طرح دوسرے مماس ما = ۳ لا - ۱۲ کے نقطۂ تماس کو معلوم کرنے کے لیے ہمیں ذیل کی ہمزاد مساواتیں حل کرنی پڑینگی:

$$\frac{\text{۲ھ - ۵}}{۳} = \frac{\text{۲ک - ۱}}{-۱} = \frac{\text{-۵ھ - ک + ۸}}{-۱۲}$$

جن کو حل کرنے سے حاصل ہوتا ہے ھ = ۴، ک = ۰۔

یعنی مماس ما = ۳ لا - ۱۲ دیے ہوئے دائرہ کو نقطۂ (۴، ۰) پر مس کرتا ہے۔

مشق ۱۲

(۱) دفعہ (۳۵) کے طریقہ پر ہمزاد مساواتوں کو حل کرنے سے معلوم کرو کہ کس صورت میں خطِ مستقیم ما = م لا + ب دائرہ

لا^{2} + ما^{2} + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰

کو مس کریگا۔

جواب: م^{2} (ف^{2} - ج^{2}) + ۲م گ (ب + ف) + گ^{2} = ب^{2} + ۲ف ب + ج

(۲) دائرہ لا^{2} + ما^{2} = ۴۹ کے ان مماسوں کی مساواتیں دریافت کرو جو محور لا سے ۶۰° کا زاویہ بناتے ہیں۔

جواب: ما = $\sqrt{3}$ لا + ۱۴ اور ما = $\sqrt{3}$ لا - ۱۴

(۳) دائرۂ لا^{2} + ما^{2} = ۲۵ کے ان مماسوں کی مساواتیں دریافت کرو جو خط ۳ لا + ۴ ما = ۰ کے متوازی ہیں۔

جواب: ۳ لا + ۴ ما + ۲۵ = ۰، ۳ لا + ۴ ما - ۲۵ = ۰

(۴) دائرہ لا^{2} + ما^{2} = ۱۶ کے اُن مماسوں کی مساواتیں دریافت کرو جو خط ما - لا = ۰ پر علی القوائم ہوں۔

جواب: لا + ما + ۴ $\sqrt{2}$ = ۰ اور لا + ما - ۴ $\sqrt{2}$ = ۰

(۵) ثابت کرو کہ اگر خط $\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = 1$ دائرۂ لا^{2} + ما^{2} = ج^{2} کو مس کرے تو

$$\frac{1}{\text{ا}^{2}} + \frac{1}{\text{ب}^{2}} = \frac{1}{\text{ج}^{2}}$$

(۶) ثابت کرو کہ خط ۳ لا - ۲ ما = ۰ دائرہ لا^{2} + ما^{2} - ۳ لا + ۲ ما = ۰

کو مس کرتا ہے۔

(۷) ایک خط اس طرح حرکت کرتا ہے کہ نقاط (ا، ۰)، (ـا، ۰) سے اس خط پر کھینچے ہوئے عمودوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ خط ہمیشہ ایک دائرہ کو مس کرتا ہے۔

[فرض کرو کہ خطِ مستقیم لاجم عہ + ماجب عہ = + ع ہے۔ نقطہ (ا، ۰) سے اس پر کا عمود اجم عہ ـ ع اور نقطۂ (ـ ا، ۰) سے اس پر کا عمود ـ اجم عہ ـ ع ہے، فرض کرو کہ ان دونوں کا مجموعہ ـ ۲ ک مستقل ہے۔

پس اجم عہ ـ ع ـ اجم عہ ـ ع = ـ ۲ک

یعنے ع = ک مستقل،

اب چاہے عہ کوئی زاویہ ہو مبدا، کو مرکز مان کر نصف قطر ک کی دُوری پر کھینچا ہوا دائرہ خطِ مستقیم کو مس کریگا] ۔

(۸) خطِ مستقیم ما = م لا + ج سے دائرہُ $لا^۲ + ما^۲ = ا^۲$ کا جو وتر حاصل ہوتا ہے اس کا طول دریافت کرو

جواب: $۲ \sqrt{\dfrac{ا^۲ + ا^۲م^۲ - ج^۲}{۱ + م^۲}}$

(۹) ثابت کرو کہ ذیل کے خطوط اور دائرے ایک دُوسرے کو مس کرتے ہیں، اور نیز نقاطِ تماس کے محدّد معلوم کرو:

(ا) ۳ لا + ۲ ما = ۰ اور $لا^۲ + ما^۲ + ۳ لا + ۲ ما = ۰$

(ب) ۳ لا ـ ۴ ما = ۱۰ اور $لا^۲ + ما^۲ + ۲ لا ـ ۶ ما = ۱۵$

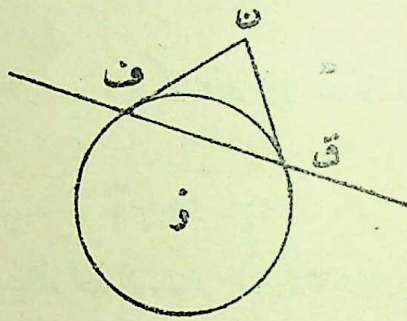
(ج) ۵ لا ـ ۱۲ ما = ۴۵ اور $لا^۲ + ما^۲ + ۱۶ لا ـ ۱۴ ما = ۵۶$

جواب: (ا) مبدا، (ب) (۲، ـ۱) (ج) (ـ۳، ـ۵)

۱۴۶۔ وترِ تماس۔

فرض کرو کہ کوئی نقطہ ن دائرہ کے باہر واقع ہے۔ گذشتہ

دفعہ میں ہم نے ثابت کیا ہے کہ ہر بیرونی نقطہ سے دائرے کے دو مماس کھینچے جا سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ یہ مماس دائرہ کو بالترتیب نقاط ف اور ق پر ملتے ہیں۔ ان دو نقطوں ف اور ق کو ملانے والا خط ف ق وترِ تماس کہلاتا ہے۔

اب ہم اس وتر کی مساوات دریافت کرینگے۔

فرض کرو کہ ن کے محدد (لا$_1$، ما$_1$) ف کے محدد (لاَ، ماَ) اور ق کے محدد (لاً، ماً) ہیں اور دائرہ کی مساوات لا^2 + ما^2 = ر^2 ہے

نقطہ ف پر کے مماس ف ن کی مساوات

لا لاَ + ما ماَ = ر^2 .... (۱)

اور نقطۂ ق پر کے مماس ق ن کی مساوات

لا لاً + ما ماً = ر^2 .... (۲)

مگر چونکہ یہ دونوں مماس نقطۂ ن میں سے گذرتے ہیں اس لیے محدد (لا$_1$، ما$_1$) مساواتوں (۱) اور (۲) کو پورا کرتے ہیں یعنے

لا$_1$ لاَ + ما$_1$ ماَ = ر^2 .... (۳)

لا$_1$ لاً + ما$_1$ ماً = ر^2 .... (۴)

اب مساوات

لا لاَ + ما ماَ = ق² .... (۵)

پر غور کرو ۔ یہ پہلے درجہ کی مساوات ہے اس لیے ضرور ایک خطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے ۔ اس کے علاوہ مساواتوں (۳) اور (۴) سے ظاہر ہے کہ خطِ مستقیم (۵) نقطوں ف (لاَ، ماَ) اور ق (لاً، ماً) میں سے گذرتا ہے ۔ اس لیے معلوم ہوا کہ وترِ تماس ف ق کی مطلوبہ مساوات (۵) ہے ۔

نتیجہ صریح ۔ مبداء و کو نقطہ ن سے ملانے والے خط کی مساوات

$$\frac{\text{ما}}{\text{ماَ}} = \frac{\text{لا}}{\text{لاَ}}$$

ہے ۔ اس خط کا "م" یعنے محور لا سے میلان کا مماس $\frac{\text{ماَ}}{\text{لاَ}}$ ہے ۔ خطِ مستقیم (۵) کا "م" $-\frac{\text{لاَ}}{\text{ماَ}}$ ہے اور اس لیے معلوم ہوتا ہے کہ وترِ تماس ف ق خطِ مستقیم و ن پر علی القوائم ہے ۔

مثال ۔ نقطہ (-۱، -۷) سے دائرہ لا² + ما² = ۲۵ کے وترِ تماس کی مساوات معلوم کرو ۔ نیز نقاطِ تماس کے محددے بھی دریافت کرو اور اس طرح مماسوں کی مساوات بھی لکھو ۔

چونکہ (-۱)² + (-۷)² > ۲۵ اس لیے دیا ہوا نقطہ دائرہ کے باہر واقع ہے ۔ پس وترِ تماس کی مساوات ضابطہ (۵) میں لاَ = -۱، ماَ = -۷ درج کرنے پر ملتی ہے ۔

- لا - ۷ ما = ۲۵ یعنے لا + ۷ ما + ۲۵ = ۰

نقاطِ تماس وہ نقطے ہیں جہاں پر یہ وترِ تماس دائرہ کو قطع کرتا ہے پس

ما = - $\frac{\text{لا} + ۲۵}{۷}$ کو دائرہ کی مساوات میں درج کر کے حاصل شدہ مساوات کو حل کرنا چاہیے ۔

یعنی لا² + (لا + ۲۵ / ۷)² = ۲۵

جس کو پھیلانے اور مختصر کرنے سے حاصل ہوتا ہے

۵۰ لا² + ۵۰ لا − ۶۰۰ = ۰ یعنی لا² + لا − ۱۲ = ۰

اس مساوات کے دو حل لا = ۳، اور لا = −۴ ہیں۔

اور ما = − (۳ + ۲۵) / ۷ = −۴، ما = − (−۴ + ۲۵) / ۷ = −۳

پس نقاطِ تماس (۳، −۴) اور (−۴، −۳) ہیں۔

نقطۂ (۳، −۴) پر کے مماس کی مساوات

۳ لا − ۴ ما − ۲۵ = ۰ ہے

اور نقطۂ (−۴، −۳) پر کے مماس کی مساوات

−۴ لا − ۳ ما − ۲۵ = ۰

نقطۂ (−۱، −۷) سے جو دو مماس کھنچ سکتے ہیں اُن کی مشترکہ مساوات ہوگی

(۳ لا − ۴ ما − ۲۵) (−۴ لا − ۳ ما − ۲۵) = ۰

یعنی

۱۲ لا² − ۷ لاما − ۱۲ ما² − ۲۵ لا − ۱۷۵ ما + ۶۲۵ = ۰

۷د۳: قطب اور قطبی۔

تعریف۔ اگر دائرہ کے اندرونی یا بیرونی نقطہ ن سے کوئی خطِ مستقیم کھینچا جائے جو دائرہ کو نقطوں ف اور ق پر قطع کرے تو ف اور ق پر کے مماسوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق "ن کا قطبی بلحاظ دائرہ" کہلاتا ہے نقطۂ ن کو "قطب" کہتے ہیں۔

آیندہ دفعہ میں ہم ثابت کرینگے کہ یہ قطبی ایک خطِ مستقیم ہے اور نیز اس کی مساوات بھی دریافت کرینگے۔

۱۷؛۳: قطبی کی مساوات ــــ فرض کرو کہ ن کے محدّد (لاً، ہاً) ہیں اور دائرہ کی مساوات

لا² + ہا² = ل² ہے۔

فرض کرو کہ ف ق دائرہ کا کوئی وتر ہے جو نقطہ ن میں سے کھینچا گیا ہے۔ اور فرض کرو کہ ف اور ق پر کے مماس نقطہ س پر قطع کرتے ہیں جس کے محدّد (ھ، ک) ہیں۔

پس خط ف ق وترِ تماس ہے نقطہ س میں سے کھینچے ہوئے مماسوں کا اور اس لیے ف ق کی مساوات گذشتہ دفعہ کے بموجب

لاھ + ہاک = ل² ....(۱)

ہے۔ لیکن خط ف ق نقطہ ن (لاً، ہاً) میں سے گزرتا ہے اس لیے ن کے محدّد (لاً، ہاً) مساوات (۱) کو پورا کرتے ہیں، پس

لاًھ + ہاًک = ل² ....(۲)

مساوات (۲) سے معلوم ہوتا ہے کہ نقطۂ (ھ، ک) جو ایک متغیر نقطہ ہے ہمیشہ مساوات

لالاً + ہاہاً = ل² ....(۳)

کو پورا کرتا ہے۔ یعنے س کا طریق ایک خطِ مستقیم (۳) ہے۔ اور یہی نقطہ ن کے قطبی کی مطلوبہ مساوات ہے۔

مشاھدہ ــ مساوات (۳) وہی ہے جو دفعہ گذشتہ میں وترِ تماس (۵) کے لیے حاصل کی گئی تھی۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر نقطۂ ن (لاً، ہاً) دائرہ کے باہر واقع ہو تو اس کا قطبی وہی خط ہے جو نقطۂ ن سے کھینچے ہوئے دائرہ کے مماسوں کا وترِ تماس ہے۔

اگر نقطہ ن (لاً، ہاً) دائرہ کے محیط پر واقع ہو تو اس کا قطبی اس پر کے مماس کے ساتھ منطبق ہوتا ہے۔

اگر نقطہ ن دائرہ کے اندر واقع ہے تو بھی مساوات (۳) سے ظاہر ہے کہ قطبی خط حقیقی ہے، دفعہ (۳؛۵۱) میں ہم نے دیکھا کہ اس نقطہ میں سے

کھینچے ہوئے دائرہ کے دونوں مماس خیالی ہونگے اور اس لیے ان کے نقاطِ تماس بھی خیالی ہونگے۔ لیکن دفعہ (۳۰۲) کے موافق عمل کرنے سے ہم دیکھینگے کہ اندرونی نقطہ کے لیے بھی آخر میں جو مساوات وترِ تماس کی حاصل ہوتی ہے وہ حقیقی ہے اور یہ مساوات وہی ہے جو اُوپر قطبی کے لیے حاصل کی گئی۔ طالب علم کے لیے اچھی مشق ہوگی کہ اندرونی نقطہ سے مماسوں کے خیالی نقاطِ تماس معلوم کرے اور ان کو ملانے والے خط کی مساوات حاصل کرے۔ ایسا کرنے سے معلوم ہوگا کہ اگرچہ نقاطِ تماس خیالی ہیں مگر وترِ تماس کی مساوات حقیقی ہے غرض کہ نقطہ ن کے اندر واقع ہونے کی صورت میں بھی وترِ تماس کی مساوات

$$لا لا_۱ + ما ما_۱ = ل^۲$$

ہوگی اور یہی ن کے قطبی کی مساوات ہے۔

پس ہر صورت میں ہم قطبی کی تعریف اس طرح بھی کر سکتے ہیں:۔

ایک دیے ہوئے نقطہ کا قطبی وہ خطِ مستقیم ہے جو اس دیے ہوئے نقطہ سے کھینچے ہوئے مماسوں کے نقاطِ تماس کو ملائے۔

نیز ایک دیے ہوئے خطِ مستقیم کا قطب وہ نقطہ ہے جو اس خطِ مستقیم اور دائرہ کے (حقیقی یا خیالی) نقاطِ تقاطع میں سے کھینچے ہوئے مماسوں کے قطع کرنے سے پیدا ہوتا ہے۔

مثال ۔ دائرہ $لا^۲ + ما^۲ = ۱۶$ کے لحاظ سے نقطہ (۔۱، ۲) کا قطبی معلوم کرو:۔

نقطہ (۔۱، ۲) دائرہ کے اندر ہے کیونکہ $(-۱)^۲ + (۲)^۲ < ۱۶$

ضابطہ (۳) میں لا = ۔۱، ما = ۲ رکھنے سے قطبی کی مساوات فوراً حاصل ہوتی ہے

$$-لا + ۲ ما = ۱۶ \quad \text{یعنے} \quad لا - ۲ ما + ۱۶ = ۰$$

۳۰۷ : اب ہم عام صورت میں جبکہ مبداء کو دائرہ کے مرکز پر نہ لیا جائے قطبی کی مساوات دریافت کرینگے۔

فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

لا² + ما² + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰

ہے اور دائرہ کے باہر کسی نقطہ ن کے محدّد (لا، ما) اور اس سے کھینچے ہوئے مماسوں کے نقاطِ تماس ف اور ق کے محدّد بالترتیب (لاَ، ماَ) اور (لاً، ماً) ہیں (دیکھو پچھلی دفعہ کی شکل)

نقطۂ ف پر کے مماس ف ن کی مساوات

لالاَ + ماماَ + گ (لا + لاَ) + ف (ما + ماَ) + ج = ۰ (۱)

اور نقطۂ ق پر کے مماس ق ن کی مساوات

لالاً + ماماً + گ (لا + لاً) + ف (ما + ماً) + ج = ۰ (۲)

ہے۔ مگر چونکہ یہ دونوں مماس نقطۂ ن میں سے گزرتے ہیں اس لیے محدّد (لا، ما) مساواتوں (۱) اور (۲) کو پورا کرتے ہیں یعنے

لالاَ + ماماَ + گ (لا + لاَ) + ف (ما + ماَ) + ج = ۰
لالاً + ماماً + گ (لا + لاً) + ف (ما + ماً) + ج = ۰ } ..... (۳)

اب مساوات

لالا + ماما + گ (لا + لا) + ف (ما + ما) + ج = ۰ (۴)

پر غور کرو۔ یہ پہلے درجہ کی مساوات ہے اس لیے ضرور ایک خطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔ اس کے علاوہ مساواتوں (۳) سے ظاہر ہے کہ خطِ مستقیم (۴) نقطوں ف اور ق میں سے گزرتا ہے۔ اس لیے معلوم ہوا کہ وترِ تماس ف ق کی مساوات (۴) ہے۔

اب قطبی کی مساوات دریافت کرنے کے لیے ہم دفعہ (۳،۷) میں دی ہوئی تعریف کو استعمال کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ دائرہ کے اندر یا باہر کوئی نقطہ ن ہے جس کے محدّد (لا، ما) ہیں۔ اور نقطہ ن میں سے ایک وتر ف ق کھینچا گیا ہے۔ نقاط ف اور ق پر دائرہ کے مماس کھینچو جو ضرور آپس میں دائرہ کے باہر ایک نقطہ ر پر

قطع کرینگے - فرض کرو کہ نقطہ س کے محدد (ھ، ک) ہیں -
پس خط ف ق وترِ تماس ہے نقطہ س میں سے کھینچے ہوئے مماسوں کا، اور اس لیے ف ق کی مساوات (۴) کے بموجب

لا ھ + ما ک + گ (لا + ھ) + ف (ما + ک) + ج = ۰ (۵)

ہے۔ لیکن خط ف ق نقطہ ن میں سے گزرتا ہے جس کے محدد (لا، ما) ہیں اس لیے

لا ھ + ما ک + گ (لا + ھ) + ف (ما + ک) + ج = ۰ (۶)

مساوات (۶) سے ظاہر ہے کہ نقطہ (ھ، ک) جو ایک متغیر نقطہ ہے ہمیشہ مساوات

لا لا + ما ما + گ (لا + لا) + ف (ما + ما) + ج = ۰ (۷)

کو پورا کرتا ہے یعنے س (ھ، ک) کا طریق خطِ مستقیم (۷) ہے اور اس لیے تعریف کے بموجب دائرہ کے لحاظ سے ن کے قطبی کی مطلوبہ مساوات (۷) ہے -

مثال - دائرہ لا^2 + ما^2 - ۵ لا - ما + ۴ = ۰ کے لحاظ سے نقطہ ن ($\frac{1}{2}$، - $\frac{1}{2}$) کا قطبی دریافت کرو - نقطہ ن کے محدد دائرہ کی مساوات میں درج کرنے پر معلوم ہوتا ہے کہ یہ نقطہ دائرہ کے باہر واقع ہے - پس نقطہ ن کا قطبی یعنے وترِ تماس دائرہ کو حقیقی نقطوں ف اور ق پر قطع کریگا -

ن کے قطبی کی مساوات ضابطہ (۷) میں لا = $\frac{1}{2}$، ما = - $\frac{1}{2}$ درج کرنے پر حاصل ہوتی ہے :

$\frac{1}{2}$ لا - $\frac{1}{2}$ ما - $\frac{5}{2}$ (لا + $\frac{1}{2}$) - $\frac{1}{2}$ (ما - $\frac{1}{2}$) + ۴ = ۰

جس کو مختصر کرنے پر ملتا ہے

۲ لا + ما - ۳ = ۰

یہی قطبی کی مطلوبہ مساوات ہے۔ اب نقاط ف اور ق کے محدّد معلوم کرنے کے لیے اس مساوات کو دائرہ کی مساوات کے ساتھ حل کرنا چاہیے۔

خط کی مساوات سے ملتا ہے: ما = ۳ - ۲ لا

دائرہ کی مساوات میں درج کرنے پر

لا^2 + (۳ - ۲ لا)^2 - ۵ لا - (۳ - ۲ لا) + ۴ = ۰

یعنی

۵ لا^2 - ۱۵ لا + ۱۰ = ۰

جس کی اصلیں ہیں لا = ۱، لا = ۲

اس کے مقابل حاصل ہوتا ہے ما = ۱، ما = -۱

پس دائرہ اور قطبی کے نقاطِ تقاطع (۱، ۱) اور (۲، -۱) ہیں

نقطۂ (۱، ۱) پر دائرہ کے مماس کی مساوات

لا + ما - $\frac{۵}{۲}$ (لا + ۱) - $\frac{۱}{۲}$ (ما + ۱) + ۴ = ۰

یعنی ۳ لا - ما - ۲ = ۰

نقطۂ (۲، -۱) پر دائرہ کے مماس کی مساوات

۲ لا - ما - $\frac{۵}{۲}$ (لا + ۲) - $\frac{۱}{۲}$ (ما - ۱) + ۴ = ۰

یعنی لا + ۳ ما + ۱ = ۰

ان مماسوں کی مساواتوں سے ظاہر ہے کہ یہ ایک دوسرے پر علی القوائم ہیں۔

۳۷۳؛ قطب کے محدّد۔

فرض کرو کہ دیے ہوئے خطِ مستقیم کی مساوات

ا لا + ب ما + ج = ۰ .... (۱)

اور دائرہ کی مساوات

لا^2 + ما^2 = ر^2 .... (۲)

ہے۔ اور فرض کرو کہ مطلوبہ قطب کے محدّد (لا$_1$، ما$_1$) ہیں۔

تب مساوات (۱) نقطہ (لا' ما') کے قطبی کی مساوات ہے یعنے مساوات (۱) اُس خط کو تعبیر کرتی ہے جو مساوات

لا لا' + ما ما' = ر² .... (۳)

سے تعبیر ہوتا ہے۔ اس لیے مساواتوں (۱) اور (۳) میں لا کا سر، ما کا سر اور مستقل رقمیں متناسب ہونی چاہئیں یعنے

لا'/ا = ما'/ب = -ر²/ج

یعنے

لا' = - ا/ج ر²، ما' = - ب/ج ر² .... (۴)

مثال - خطِ مستقیم ۳ لا + ۵ ما - ۴ = ۰ کا قطب بلحاظِ دائرہ لا² + ما² = ۱۶ معلوم کرو۔

فرض کرو کہ مطلوبہ قطب کے محدّد (لا' ما') ہیں تو قطب کی مساوات

لا لا' + ما ما' = ۱۶

ہوگی۔ یہ مساوات اور دی ہوئی مساوات دونوں ایک ہی خط کو تعبیر کرتی ہیں اس لیے

لا'/۳ = ما'/۵ = ۱۶/۴ = ۴

∴ لا' = ۱۲، ما' = ۲۰،

یعنے قطب کے محدّد (۱۲، ۲۰) ہیں۔

۳۶۷ - اس دفعہ میں ہم قطبی خطوں سے متعلق ایک اہم خاصیت ثابت کرینگے جو تحلیلی طریقہ سے ہندسی طریقہ کی نسبت جلد اور آسانی کے ساتھ ثابت ہوتی ہے

مسئلہ - اگر ایک دائرہ کے لحاظ سے ایک دیے ہوئے نقطۂ ف کا

قطبی ایک دوسرے دیے ہوئے نقطہ ق میں سے گزرے تو اسی دائرہ کے لحاظ سے ق کا قطبی نقطۂ ف میں سے گزریگا۔

فرض کرو کہ ف کے محدد (لا، ہا) اور ق کے محدد (لا٫، ہا٫) ہیں۔ اور دائرہ کی مساوات لا² + ہا² = ل² ہے۔

نقطۂ ف کے قطبی کی مساوات

لا لا٫ + ہا ہا٫ = ل² ہے .... (۱)

اور چونکہ یہ قطبی نقطۂ ق میں سے گزرتا ہے اس لیے محدد (لا٫، ہا٫) مساوات (۱) کو پورا کرتے ہیں یعنے

لا٫ لا + ہا٫ ہا = ل² .... (۲)

اب نقطۂ ق کے قطبی مساوات

لا٫ لا + ہا٫ ہا = ل² .... (۳)

ہے اور ثابت کرنا ہے کہ نقطۂ ف کے محدد (لا، ہا) اس مساوات کو پورا کرینگے۔ مساوات (۳) سے ظاہر ہے کہ درحقیقت ف کے محدد مساوات (۳) کو پورا کرتے ہیں

پس ثابت ہوا کہ ق کا قطبی نقطہ ف میں سے گذرتا ہے۔ ایسے دو نقطوں ف اور ق کو دائرہ کے لحاظ سے مزدوج نقطے کہتے ہیں۔

مثال - فرض کرو کہ ایک دائرہ

لا² + ہا² - ۴لا + ۶ہا - ۲۳ = ۰ .... (۱)

اور دو نقطے ا (۱، -۴) اور ب (-۱۵، -۲۲) دیے ہوئے ہیں۔ ہم ثابت کرینگے کہ یہ دونوں نقطے دائرہ (۱) کے لحاظ سے مزدوج ہیں۔

نقطہ ا (۱، -۴) کا قطبی بلحاظ دائرہ (۱) حسب ذیل ہے

لا - ۴ہا - ۲(لا + ۱) + ۳(ہا - ۴) - ۲۳ = ۰

یعنی

لا + ہا + ۳۷ = ۰ .... (۲)

اب چونکہ - ۱۵ - ۲۲ + ۳۷ = ۰۔ اس لیے معلوم ہوا کہ نقطۂ ب کا قطبی (۲)

نقطہ ب میں سے گزرتا ہے۔ اسی طرح نقطہ ب (-۱۵، -۲۲) کا قطبی بلحاظ دائرہ (۱) حسب ذیل ہے۔

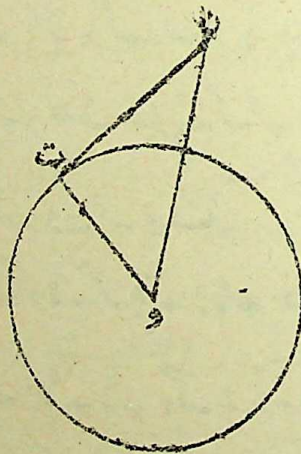
- ۱۵ لا - ۲۲ ما - ۲ (لا - ۱۵) + ۳ (ما - ۲۲) - ۲۳ = ۰

یعنی ۱۷ لا + ۱۹ ما + ۵۹ = ۰ .... (۳)

اور چونکہ ۱۷ (۱) + ۱۹ (-۴) + ۵۹ = ۰ اس لیے نقطہ ب کا قطبی (۳) نقطہ ا میں سے گزرتا ہے۔

پس نقاط ا اور ب مزدوج نقطے ہیں۔

۳۸: بیرونی نقطے سے دائرہ کے مماس کا طول۔

(ل) فرض کرو کہ ن ایک بیرونی نقطہ ہے جس کے محدد (لا، ما) ہیں اور دائرہ کی مساوات لا² + ما² = ر² ہے۔

فرض کرو کہ ن سے دائرہ کا ایک مماس ن ت ہے جس کا طول دریافت کرنا ہے۔

چونکہ زاویہ و ت ن قائمہ ہے، اس لیے

ن ت² = و ن² - و ت² ....(۱)

لیکن و ن² = لا² + ما² ....(۲)

و ت² = ر² ....(۳)

اس لیے

ن ت² = لا² + ما² - ر² ....(۴)

(ب) دوسری صورت میں فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات عام سے عام ہے جبکہ محور علی القوائم ہوں

لا² + ما² + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰

ہے، اگر لا² اور ما² کا سر اکائی نہ ہو بلکہ ل ہو تو مساوات کو ل پر تقسیم کر کے اسے اس شکل میں لے آنا چاہیے۔ اس صورت میں مرکز کے محدّد (۰،۰) نہیں بلکہ (-گ، -ف) ہیں۔

پس

و ن² = (لا + گ)² + (ما + ف)² ....(۵)

اور و ت² = (نصف قطر)² = گ² + ف² - ج ....(۶)

پس

ن ت² = و ن² - و ت²

= (لا + گ)² + (ما + ف)² - (گ² + ف² - ج)

= لا² + ما² + ۲گ لا + ۲ف ما + ج ....(۷)

دونوں صورتوں میں ہم دیکھتے ہیں کہ مماس کے طول کا مربع دائرہ کی مساوات میں نقطہ کے محدّد درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

مشق ۱۳

۱۔ نقطۂ (۲، -۱) کا قطبی بلحاظ دائرہ لا² + ما² = ۹ معلوم کرو

جواب: لا - ۲ ما + ۹ = ۰

۲۔ خط لا + ۲ ما - ۱۸ = ۰ کا قطب بلحاظ دائرہ لا² + ما² = ۳۶ معلوم کرو۔

جواب: (۲، ۴)

۳۔ نقطۂ (۳، ۴) سے دائرہ لا² + ما² = ۱۶ کے مماس کا طول معلوم کرو۔

جواب ۳

۴۔ دائرہ لا² + ما² = ۳ کے وہ مماس دریافت کرو جو محور لا سے (ا) ۶۰° کے اور (ب) ۴۵° کے زاویے بناتے ہیں۔

جواب: (ا) ما = √۳ لا ± ۲ √۳ (ب) ما = لا ± √۶

۵۔ دائرہ لا² + ما² = ۸ کے لحاظ سے خط ۳ لا - ما = ۱ کا قطب معلوم کرو۔ جواب (۲۴، -۸)

۶۔ دائرہ ۴ لا² + ۴ ما² + ۱۲ لا - ۱۴ ما + ۱۵ = ۰ کے لحاظ سے نقطۂ (۳، -۱) کا قطبی معلوم کرو اور ثابت کرو کہ نقطۂ (۴، -۴) اس کا ایک مزدوج نقطہ ہے

۷۔ ایک مثلث ا ب ج کے اضلاع کی مساواتیں
۲ لا - ۳ ما - ۲۵ = ۰، لا - ما - ۵ = ۰، ۲ لا + ۳ ما + ۲۵ = ۰ ہیں۔
دائرہ لا² + ما² = ۲۵ دیا ہوا ہے۔ ثابت کرو کہ مثلث ا ب ج کا ہر راس بقیہ دو راسوں کا مزدوج نقطہ ہے۔

۹ء۳: توضیحی مثالیں۔

۱۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ن ثابت نقطوں سے اس کے فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے ثابت کرو کہ نقطہ کا طریق

ایک دائرہ ہے۔

فرض کرو کہ دیے ہوئے نقطے ف_1، ف_2، ف_3 ...... $\text{ف}_\text{ن}$ ہیں جن کے محدد بالترتیب $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$، $(\text{لا}_2، \text{ما}_2)$، $(\text{لا}_3، \text{ما}_3)$، ..... $(\text{لا}_\text{ن}، \text{ما}_\text{ن})$ ہیں۔ اور فرض کرو کہ ایک متحرک نقطہ ق ہے جس کے محدد (لا، ما) ہیں۔ اب

$$(\text{ق ف}_1)^2 = (\text{لا} - \text{لا}_1)^2 + (\text{ما} - \text{ما}_1)^2$$

$$(\text{ق ف}_2)^2 = (\text{لا} - \text{لا}_2)^2 + (\text{ما} - \text{ما}_2)^2$$

$$(\text{ق ف}_\text{ن})^2 = (\text{لا} - \text{لا}_\text{ن})^2 + (\text{ما} - \text{ما}_\text{ن})^2$$

پس دی ہوئی شرط کے مطابق

$$\left\{(\text{لا} - \text{لا}_1)^2 + (\text{ما} - \text{ما}_1)^2\right\} + \left\{(\text{لا} - \text{لا}_2)^2 + (\text{ما} - \text{ما}_2)^2\right\} + \ldots + \left\{(\text{لا} - \text{لا}_\text{ن})^2 + (\text{ما} - \text{ما}_\text{ن})^2\right\} = \text{مستقل} = \text{م}$$

یعنے پھیلانے پر

$$\text{ن}(\text{لا}^2 + \text{ما}^2) - 2\,\text{لا}(\text{لا}_1 + \text{لا}_2 + \text{لا}_3 + \ldots + \text{لا}_\text{ن}) - 2\,\text{ما}(\text{ما}_1 + \text{ما}_2 + \ldots + \text{ما}_\text{ن})$$

$$+ \left\{(\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2) + (\text{لا}_2^2 + \text{ما}_2^2) + \ldots + (\text{لا}_\text{ن}^2 + \text{ما}_\text{ن}^2) - \text{م}\right\} = 0 \quad (1)$$

فرض کرو کہ

$$-\frac{\text{لا}_1 + \text{لا}_2 + \ldots + \text{لا}_\text{ن}}{\text{ن}} = \text{گ}$$

$$-\frac{\text{ما}_1 + \text{ما}_2 + \ldots + \text{ما}_\text{ن}}{\text{ن}} = \text{ف} \quad (2)$$

$$\frac{1}{\text{ن}}\left\{(\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2) + (\text{لا}_2^2 + \text{ما}_2^2) + \ldots + (\text{لا}_\text{ن}^2 + \text{ما}_\text{ن}^2) - \text{م}\right\} = \text{ج}$$

تو مساوات (۱) کی شکل حسب ذیل ہو جاتی ہے

$$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\,\text{گ}\,\text{لا} + 2\,\text{ف}\,\text{ما} + \text{ج} = 0$$

اس سے ظاہر ہے کہ مساوات (۱) دائرہ کو تعبیر کرتی ہے یعنے نقطہ ق کا طریق ایک دائرہ ہے۔ اس دائرہ کا مرکز (-گ، -ف) یعنے $\left(\frac{\text{مج}\,\text{لا}_1}{\text{ن}}، \frac{\text{مج}\,\text{ما}_1}{\text{ن}}\right)$ ہے

اور نصف قطر ر ہو تو

$$\text{ر}^2 = \text{گ}^2 + \text{ف}^2 - \text{ج} = \frac{1}{\text{ن}^2}\left\{(\Sigma\ \text{لا}_1)^2 + (\Sigma\ \text{ما}_1)^2\right\} \Sigma\,(\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2) - \text{م}\}$$

۲ ۔ خطِ مستقیم ا لا + ب ما + ج = ۰

اور دائرہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + ۲\,\text{گ لا} + ۲\,\text{ف ما} + \text{س} = ۰$

کے نقاطِ تقاطع کو مبداء سے ملانے والے خطوطِ مستقیم کی مساوات دریافت کرو۔

ہم کو معلوم ہے کہ مبداء میں سے گزرنے والے دو خطوطِ مستقیم کی مساوات دوسرے درجہ کی متجانس ہوتی ہے۔ اس لیے ہم کوشش کرینگے کہ درجۂ دوم کی ایک ایسی متجانس مساوات دریافت کریں جس کو خطِ مستقیم اور دائرہ کے نقاطِ تقاطع کے محدّد پورا کریں۔

فرض کرو کہ خطِ مستقیم دائرہ کو نقاط (لا₁، ما₁) اور (لا₂، ما₂) پر قطع کرتا ہے ۔ تو

$$\left.\begin{array}{l} \text{ا لا}_1 + \text{ب ما}_1 + \text{ج} = ۰ \\ \text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 + ۲\,\text{گ لا}_1 + ۲\,\text{ف ما}_1 + \text{س} = ۰ \end{array}\right\} \quad \ldots (۱)$$

اور

$$\left.\begin{array}{l} \text{ا لا}_2 + \text{ب ما}_2 + \text{ج} = ۰ \\ \text{لا}_2^2 + \text{ما}_2^2 + ۲\,\text{گ لا}_2 + ۲\,\text{ف ما}_2 + \text{س} = ۰ \end{array}\right\} \quad \ldots (۲)$$

اب ہم دائرہ کی مساوات کو خطِ مستقیم کی مساوات کی مدد سے متجانس بنائینگے ۔ خطِ مستقیم کی مساوات سے ظاہر ہے کہ

$$\text{ا لا} + \text{ب ما} = -\text{ج}$$

اور اس لیے $(\text{ا لا} + \text{ب ما})^2 = -\text{ج}\,(\text{ا لا} + \text{ب ما}) = \text{ج}^2 \quad \ldots (۳)$

اب دائرہ کی مساوات میں دوسرے درجے کی رقموں کو ج² سے، پہلے درجہ کی رقموں کو $\{-\text{ج}\,(\text{ا لا} + \text{ب ما})\}$ سے اور مستقل رقم کو $(\text{ا لا} + \text{ب ما})^2$ سے ضرب دیں تو

ظاہر ہے کہ اس سے مساوات میں کوئی فرق نہیں آئیگا اور نیز سب رقمیں دُوسرے درجہ کی ہوجائینگی ۔ یعنے مساوات ہوجائیگی

ج^۲ (لا^۲ + ما^۲) ـ ۲ ج (گ لا + ف ما) (ا لا + ب ما) + س (ا لا + ب ما)^۲ = ۰ (۴)

مساوات (۴) درجۂ دوم کی اور متجانس ہے اور اس لیے مبداء میں سے گزرنے والے دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے ۔

اگر اس میں (لا، ما) بھرتی کریں تو مساواتوں (۱) کی بناء معلوم ہوتا ہے کہ مساوات (۴) پُوری ہوتی ہے ۔ اسی طرح (لاً، ماً) بھرتی کریں تو مساواتوں (۲) کی بناء پر معلوم ہوتا ہے کہ مساوات (۴) پُوری ہوتی ہے ۔ اس لیے معلوم ہوا کہ مساوات (۴) نقاطِ تقاطع کو مبداء سے ملانے والے خطوطِ مستقیم کی مطلوبہ مساوات ہے ۔

اس مساوات کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں:

لا^۲ {ج^۲ ـ ۲ ا ج گ + ا^۲ س} ـ ۲ لا ما {ب ج گ + ا ج ف}

+ ما^۲ {ج^۲ ـ ۲ ب ج ف + ب^۲ س} = ...(۵)

یعنے

ا لا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ = ۰ ....(۶)

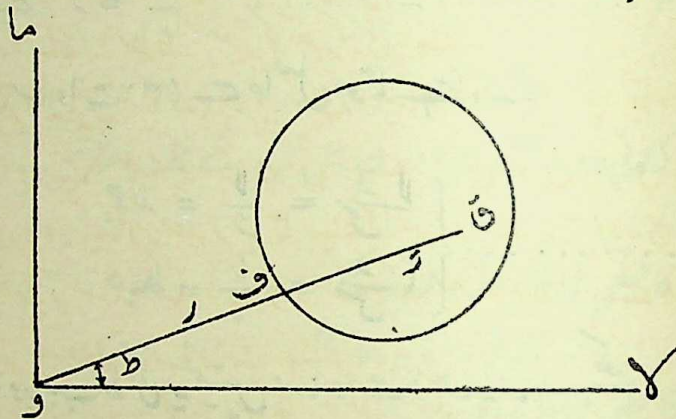
اگر ان دونوں خطوط کا درمیانی زاویہ فہ ہو تو دفعہ ۲۵۲ سے ہم کو معلوم ہے کہ

مس فہ = ۲ √(ھ^۲ ـ ا ب) / (ا + ب)

۳ ـ ایک ثابت نقطہ و سے کوئی خط کھینچا گیا ہے جو ایک دیے ہوئے دائرہ کو نقطۂ ف پر ملتا ہے ۔ خط و ف پر ایک نقطہ ق ایسا لیا گیا ہے کہ و ف × و ق ہمیشہ مستقل رہتا ہے ۔ ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک دائرہ ہے ۔

فرض کرو کہ ثابت نقطہ و کو ہم مبداء لیتے ہیں اور اس میں سے کسی قائم محوروں کے لحاظ سے دیے ہوئے دائرہ کی مساوات

لا^۲ + ما^۲ + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰ .... (۱)

ہے۔ و میں سے محور لا کے ساتھ زاویہ ط بناتا ہوا کوئی خط کھینچتے ہیں جو دائرہ سے نقطہ ف پر ملتا ہے۔

فرض کرو کہ نقطۂ ف کے محدّد (لا، ما) ہیں اور فاصلہ وف = ر تو ظاہر ہے کہ

لا = ر جم ط، ما = ر جب ط

اور چونکہ نقطۂ ف دائرہ پر واقع ہے اس لیے

لا^۲ + ما^۲ + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰

یعنے ر^۲ جم^۲ ط + ر^۲ جب^۲ ط + ۲گ ر جم ط + ۲ف ر جب ط + ج = ۰

یعنے ر^۲ + ۲گ ر جم ط + ۲ف ر جب ط + ج = ۰ .... (۲)

اب فرض کرو کہ ق کے محدّد (لا، ما) ہیں اور وق = ر̄

اس لیے لا = ر̄ جم ط، ما = ر̄ جب ط .... (۳)

یعنی

لا^{2} + ما^{2} = رَ^{2} .... (۴)

لیکن سوال میں دیا ہوا ہے کہ وف × وق مستقل ہے، پس
ر.رَ = مستقل = ک (فرض کرو)

اس لیے رَ = ک/ر .... (۵)

پس مساوات (۳) سے حاصل ہوتا ہے:—

جم ط = لا/رَ = ر لا/ک
جب ط = ما/رَ = ر ما/ک .... (۶)

جم ط اور جب ط کی یہ قیمتیں مساوات (۲) میں رکھنے سے حاصل ہوتا ہے:

ر^{2} + ۲گ.ر.(ر/ک) لا + ۲ف.ر.(ر/ک) ما + ج = ۰

یعنی

ر^{2} {۱ + ۲ (گ/ک) لا + (۲ف/ک) ما} + ج = ۰ .... (۷)

لیکن مساوات (۴) سے

لا^{2} + ما^{2} = رَ^{2} = ک^{2}/ر^{2}

اس لیے ر^{2} = ک^{2}/(لا^{2} + ما^{2}) .... (۸)

ر^{2} کی یہ قیمت مساوات (۷) میں رکھنے سے

(ک^{2}/(لا^{2} + ما^{2})) {۱ + ۲ (گ/ک) لا + (۲ف/ک) ما} + ج = ۰

یعنی (لا^{2} + ما^{2}) سے ضرب دینے پر اور پھیلانے پر حاصل ہوتا ہے:

$$ج(لا^2 + ما^2) + ۲گ ک لا + ۲ف ک ما + ک^2 = ۰ \quad ......(۹)$$

جو ایک دائرہ کی مساوات ہے۔ پس معلوم ہوا کہ نقطۂ ق کا طریق ایک دائرہ ہے۔

۴۔ ایک دائرہ کے مرکز سے دو نقطوں کے فاصلے ان عمودوں کے طول کے متناسب ہوتے ہیں جو ایک نقطہ سے دوسرے کے قطبی خط پر ڈالے جائیں۔

فرض کرو کہ دائرہ کا مرکز و ہے اور و کو مبدا مان کر دائرہ کی مساوات ہے

$$لا^2 + ما^2 = ر^2 \quad ......(۱)$$

نیز فرض کرو کہ کوئی دو نقطے $ن_1$ اور $ن_2$ ہیں جن کے محدد بالترتیب $(لا_1، ما_1)$ اور $(لا_2، ما_2)$ ہیں۔

$ن_1$ کا قطبی بلحاظ دائرہ (۱) کے

$$لا لا_1 + ما ما_1 = ر^2 \quad ......(۲)$$

اور $ن_2$ کا قطبی بلحاظ دائرہ کے

$$لا لا_2 + ما ما_2 = ر^2 \quad ......(۳)$$

ہے۔ فرض کرو کہ نقطۂ $ن_1$ سے $ن_2$ کے قطبی (۳) پر ڈالے ہوئے عمود کا طول $ع_1$ اور نقطۂ $ن_2$ سے $ن_1$ کے قطبی (۲) پر ڈالے ہوئے عمود کا طول $ع_2$ ہے تو

$$ع_1 = \frac{لا_1لا_2 + ما_1ما_2 - ر^2}{\sqrt{لا_2^2 + ما_2^2}} \quad ......(۴)$$

$$ع_2 = \frac{لا_1لا_2 + ما_1ما_2 - ر^2}{\sqrt{لا_1^2 + ما_1^2}} \quad ......(۵)$$

اب فرض کرو کہ دائرہ کے مرکز و سے نقطۂ $ن_1$ کا فاصلہ $ر_1$ اور $ن_2$ کا فاصلہ $ر_2$ ہے تو

$$ر_1 = \sqrt{لا_1^2 + ما_1^2}، \quad ر_2 = \sqrt{لا_2^2 + ما_2^2} \quad ......(۶)$$

پس

$$\frac{ر_1}{ع_1} = \frac{\sqrt{لا_1^2 + ما_1^2}\cdot\sqrt{لا_2^2 + ما_2^2}}{لا_1لا_2 + ما_1ما_2 - ر^2} = \frac{ر_2}{ع_2} \quad ......(۷)$$

یعنے ع : ع = ر : ر .... (۸)

یعنے عمودوں کے طول نقطوں کے فاصلوں سے متناسب ہوتے ہیں۔

۵۔ خطِ مستقیم ا لا + ب ما + ج = ۰ کا قطب دائرہ

لا^۲ + ما^۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + س = ۰ .... (۱)

کے لحاظ سے دریافت کرو۔

فرض کرو کہ مطلوبہ قطب نقطہ (لاَ، ماَ) ہے جہاں لاَ، ماَ کی قیمتیں ہمیں دریافت کرنی ہیں۔ ہم نے دفعہ (۲، ۷، ۳) میں معلوم کیا ہے کہ نقطۂ (لاَ، ماَ) کا قطبی بلحاظ دائرہ (۱) کے حسبِ ذیل ہوتا ہے:

لا لاَ + ما ماَ + گ (لا + لاَ) + ف (ما + ماَ) + س = ۰ .... (۲)

اب چونکہ ہر خط ایک دیے ہوئے دائرہ کے لحاظ سے ایک اور صرف ایک ہی نقطہ کا قطبی ہوتا ہے اور اس کے برعکس کسی دیے ہوئے نقطہ کا ایک دیے ہوئے دائرہ کے لحاظ سے ایک اور صرف ایک ہی قطبی خط ہوتا ہے اس لیے دی ہوئی مساوات ا لا + ب ما + ج = ۰ اور مساوات (۲) دونوں ایک ہی خطِ مستقیم کو تعبیر کرتے ہیں۔ مساوات (۲) کو ہم یوں بھی لکھ سکتے ہیں:

لا (لاَ + گ) + ما (ماَ + ف) + گ لاَ + ف ماَ + س = ۰ ...... (۳)

مساوات (۳) اور دی ہوئی مساوات ا لا + ب ما + ج = ۰ میں لا اور ما کے سر مستقل رقمیں متناسب ہونی چاہییں۔ یعنے

(لاَ + گ) / ا = (ماَ + ف) / ب = (گ لاَ + ف ماَ + س) / ج .... (۴)

لاَ اور ماَ کو دریافت کرنے کے لیے یہ دو مساواتیں ہیں جن سے حسبِ ذیل قیمتیں حاصل ہوتی ہیں:

لاَ = (ا س + ب گ ف − ا ف^۲ − ج گ) / (ج − ا گ − ب ف) ، ماَ = (ب س + ا گ ف − ب گ^۲ − ج ف) / (ج − ا گ − ب ف)

۶۔ ایک دائرہ س اور دو ثابت نقطے ف اور ق دیے ہوئے ہیں۔

دائرہ س کے لحاظ سے ف اور ق کے قطبی خط ایک دوسرے کو نقطہ ر پر قطع کرتے ہیں۔ تو ثابت کرنا ہے کہ ر کا قطبی نقطوں ف اور ق میں سے گزرنے والا خط ہوگا۔

قطبی خطوں سے متعلق دفعہ ۴، ۷، ۳ میں دی ہوئی خاصیت استعمال کی جائے تو ثبوت فوراً مل جاتا ہے۔ یعنے چونکہ ف کا قطبی ر میں سے گزرتا ہے۔ اس لیے ر کا قطبی ف میں سے گزریگا۔ اسی طرح ق کا قطبی چونکہ ر میں سے گزرتا ہے اس لیے ر کا قطبی ق میں سے بھی گزریگا۔ پس ر کا قطبی خط ف ق ہے۔

لیکن دفعہ ۴، ۷، ۳ کے مسئلہ کو استعمال کیے بغیر بھی اس مسئلہ کو بالراست ثابت کر سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات $\text{لا}^2+\text{ما}^2=\text{ر}^2$ ف کے مجدد $(\text{لا}_1،\ \text{ما}_1)$ اور ق کے مجدد $(\text{لا}_2،\ \text{ما}_2)$ ہیں۔ نیز فرض کرو کہ ف اور ق کے قطبیوں کے نقطۂ تقاطع ر کے مجدد $(\text{لاَ}،\ \text{ماَ})$ ہیں۔

ظاہر ہے کہ $(\text{لاَ}،\ \text{ماَ})$ ذیل کی مساواتوں سے حاصل ہونگے:

$$\text{لاَ}\,\text{لا}_1+\text{ماَ}\,\text{ما}_1-\text{ر}^2=0$$

$$\text{لاَ}\,\text{لا}_2+\text{ماَ}\,\text{ما}_2-\text{ر}^2=0$$

جس سے ملتا ہے کہ $\text{لاَ}=\dfrac{\text{ر}^2(\text{ما}_2-\text{ما}_1)}{\text{لا}_1\text{ما}_2-\text{لا}_2\text{ما}_1}$، $\text{ماَ}=\dfrac{\text{ر}^2(\text{لا}_1-\text{لا}_2)}{\text{لا}_1\text{ما}_2-\text{لا}_2\text{ما}_1}$ ......(۱)

اب دائرہ س کے لحاظ سے نقطۂ ر $(\text{لاَ}،\ \text{ماَ})$ کے قطبی کی مساوات ہوگی

$$\text{لا}\,\text{لاَ}+\text{ما}\,\text{ماَ}=\text{ر}^2 \quad \text{یعنے} \quad \frac{\text{لا}\,\text{ر}^2(\text{ما}_2-\text{ما}_1)}{\text{لا}_1\text{ما}_2-\text{لا}_2\text{ما}_1}+\frac{\text{ما}\,\text{ر}^2(\text{لا}_1-\text{لا}_2)}{\text{لا}_1\text{ما}_2-\text{لا}_2\text{ما}_1}=\text{ر}^2$$

یعنے

$$\text{لا}(\text{ما}_2-\text{ما}_1)+\text{ما}(\text{لا}_1-\text{لا}_2)=(\text{لا}_1\text{ما}_2-\text{لا}_2\text{ما}_1)$$

$$=\text{لا}_1(\text{ما}_2-\text{ما}_1)+\text{ما}_1(\text{لا}_1-\text{لا}_2)$$

یعنی

(لا − لا۱) (ما۲ − ما۱) = (ما − ما۱) (لا۲ − لا۱)

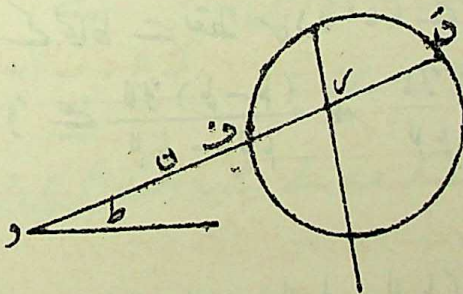
یعنی

(لا − لا۱) / (لا۲ − لا۱) = (ما − ما۱) / (ما۲ − ما۱) .... (۲)

مساوات (۲) ایک ایسے خط کی مساوات ہے جو (لا۱، ما۱) اور (لا۲، ما۲) میں سے گزرتا ہے۔ پس معلوم ہوا کہ نقطہ ر کا قطبی نقطوں ف اور ق میں سے گزرتا ہے، یعنی خط ف ق ہے۔

۷۔ ایک دائرہ س اور ایک ثابت نقطہ و دیا ہوا ہے۔ و میں سے ایک خط کسی سمت میں کھینچا جاتا ہے جو دائرہ کو نقاط ف اور ق پر ملتا ہے۔ دائرہ س کے لحاظ سے و کا قطبی خط ف ق کو نقطہ ر پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرنا ہے کہ و ف، و ر اور و ق موسیقی سلسلہ میں ہونگے یعنی بالفاظِ دیگر و اور ر خط ف ق کی موسیقی تقسیم کرینگے۔

دیے ہوئے ثابت نقطہ و کو مبداء اور اس میں سے گزرنے والے کوئی قایم محور لو۔ فرض کرو کہ دائرہ س کی مساوات لا² + ما² + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰ ہے۔ خط و ف ق کا زاویہ محور لا سے ط، نقاط ف، ر، ق کے کارٹیزی محدّد بالترتیب

(لا۱، ما۱)، (لا، ما)، (لا۲، ما۲) اور قطبی محدّد (ر۱، ط)، (ر، ط) اور (ر۲، ط) ہیں۔

فرض کرو کہ خط ف ق پر کوئی نقطہ ن ہے جس کے کارٹیزی محدّد (لا، ما)

اور قطبی محدّد (ر، ط) ہیں تو ہم جانتے ہیں کہ لا = ر جم ط، ما = ر جب ط
اب اگر نقطہ ن دائرہ پر واقع ہو تو (ر جم ط، ر جب ط) دائرہ س
کی مساوات پورا کرینگے، پس

ر۲ (جم۲ ط + جب۲ ط) + ۲ ر (گ جم ط + ف جب ط) + ج = ۰

یعنے

ر۲ + ۲ ر (گ جم ط + ف جب ط) + ج = ۰ .... (۱)

ر۱، ر۲ اس مساوات کی دو اصلیں ہیں اور مساواتوں کے نظریہ سے ہم کو معلوم ہے کہ

ر۱ + ر۲ = −۲ (گ جم ط + ف جب ط) ...... (۲)

اور ر۱ ر۲ = ج .... (۳)

نیز دائرہ س کے لحاظ سے نقطہ و (۰، ۰) کے قطبی کی مساوات ہوگی

لا (۰) + ما (۰) + گ (لا + ۰) + ف (ما + ۰) + ج = ۰

یعنی گ لا + ف ما + ج = ۰ .... (۴)

چونکہ نقطہ م (رَ، ط) اس قطبی (۴) پر واقع ہے اس لیئے

گ (رَ جم ط) + ف (رَ جب ط) + ج = ۰

یعنی رَ (گ جم ط + ف جب ط) + ج = ۰

رَ = ج / (گ جم ط + ف جب ط) ..... (۵)

اب مساواتوں (۲) اور (۳) سے قیمتیں درج کرنے پر ملتا ہے کہ

۱/ر۱ + ۱/ر۲ = (ر۱ + ر۲) / (ر۱ ر۲) = −۲ (گ جم ط + ف جب ط) / ج .... (۶)

اور مساوات (۵) سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{۲}{ر_۲} = ۲ - \frac{گ جم طہ + ف جب طہ}{ج} \quad ......(۷)$$

پس (۶) اور (۷) کی بناء پر معلوم ہوتا ہے کہ

$$\frac{۲}{ر_۲} = \frac{۱}{ر_۱} + \frac{۱}{ر_۳} \quad ......(۸)$$

اور یہی شرط ہے کہ ر۱، ر۲، ر۳ موسیقی سلسلہ میں ہوں ۔ پس ثابت ہوگیا کہ نقاط و، ر نقاط ف، ق کے موسیقی مزدوج نقطے ہیں۔

اعلیٰ ریاضی میں دائرہ، اور بالعموم کسی دوسرے درجہ کے منحنی س کے لحاظ سے نقطہ و کے قطبی کی تعریف اسی خاصیت کی بناء پر کی جاتی ہے کہ اگر و میں سے کسی سمت میں خطِ مستقیم کھینچا جائے جو منحنی کو نقاط ف اور ق پر ملے اور پھر خط ف ق پر ایک نقطہ ر ایسا معلوم کیا جائے کہ و، ر خط ف ق کو موسیقی نسبت میں تقسیم کریں تو ر کے طریق کو منحنی س کے لحاظ سے و کا قطبی کہتے ہیں۔

مشاہدہ ۔ مساوات (۳) سے ظاہر ہے کہ مساوات (۱) کی دونوں اصلوں ر۱، ر۳ کا حاصلِ ضرب مستقل ہے یعنے زاویہ طہ کی قیمت پر منحصر نہیں ہے ۔ یہ نتیجہ ہم کو علم ہندسہ سے بھی معلوم ہے کہ اگر ایک ثابت نقطہ و میں سے کسی سمت میں دائرہ کا قاطع و ف ق کھینچا جائے تو و ف × و ق کی قیمت مستقل ہوتی ہے اور و سے کھینچے ہوئے مماس کے طول کے مربع کے مساوی ہوتی ہے ۔

مشق ۱۴

دائرہ پر متفرق سوالات

۱ ۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک ثابت نقطہ سے اس کے فاصلہ کا مربع ایک ثابت خطِ مستقیم پر اس نقطہ سے عمود کے طول کے متناسب ہے

ثابت کرو کہ نقطہ کا طریق دائرہ ہے۔

۲۔ خطِ مستقیم لا + ۲ ما - ۳ = ۰ اور دائرہ لا^{۲} + ما^{۲} - ۲ لا - ۲ ما = ۰ کے نقاطِ تقاطع کو مبدا سے ملانے والے خطوطِ مستقیم کی مساوات دریافت کرو اور ثابت کرو کہ یہ دونوں خط باہم علی القوائم ہیں۔

جواب: لا^{۲} - ۶ لا ما - ما^{۲} = ۰

۳۔ ثابت کرو کہ اس دائرہ کی مساوات جس کا قطر نقاط (لا$_{۱}$، ما$_{۱}$) اور (لا$_{۲}$، ما$_{۲}$) کو ملانے والا خط ہے (لا - لا$_{۱}$)(لا - لا$_{۲}$) + (ما - ما$_{۱}$)(ما - ما$_{۲}$) = ۰ ہے۔

۴۔ دائرہ لا^{۲} + ما^{۲} = ۴ کے اس مماس کی مساوات دریافت کرو جو خط لا + ۲ ما + ۳ = ۰ کے متوازی ہے۔

جواب: لا + ۲ ما + ۲ $\sqrt{۵}$ = ۰، لا + ۲ ما - ۲ $\sqrt{۵}$ = ۰

۵۔ ثابت کرو کہ خط ما = لا + ج $\sqrt{۲}$ دائرہ لا^{۲} + ما^{۲} = ج^{۲} کو مس کرتا ہے۔ نیز اس کا نقطۂ تماس معلوم کرو۔

جواب: $\left(-\frac{ج}{\sqrt{۲}} ، \frac{ج}{\sqrt{۲}}\right)$

۶۔ دائرہ لا^{۲} + ما^{۲} = ر^{۲} کا وہ مماس دریافت کرو جو خط ما = م لا پر عمود ہو۔

جواب: لا + م ما - ر $\sqrt{۱ + م^{۲}}$ = ۰، لا + م ما + ر $\sqrt{۱ + م^{۲}}$ = ۰

۷۔ خط $\frac{لا}{ا}$ + $\frac{ما}{ب}$ = ۱ دائرہ لا^{۲} + ما^{۲} = ر^{۲} کو جن نقطوں پر ملتا ہے ان کو ملانے والے وتر کا طول دریافت کرو۔

جواب: ۲ $\sqrt{ر^{۲} - \frac{ا^{۲} ب^{۲}}{ا^{۲} + ب^{۲}}}$

۸۔ اس دائرہ کی مساوات دریافت کرو جس کا مرکز نقطۂ (۱، ۴) پر واقع ہو اور جو خطِ مستقیم ۵ لا + ۱۲ ما = ۱ کو مس کرے۔

جواب: لا^{۲} + ما^{۲} - ۲ لا - ۸ ما + ۱ = ۰

۹۔ اس دائرہ کی مساوات دریافت کرو جو محوروں کو فاصلوں ۳ اور ۵ پر

قطع کرے اور مبداء میں سے گذرے ۔

جواب : لا^{۲} + ما^{۲} + ۳لا - ۵ما = ۰ ۔

۱۰ ۔ نقطۂ (-۲ ، ۳) کا قطبی بلحاظ دائرہ لا^{۲} + ما^{۲} - ۴لا - ۶ما + ۵ = ۰ کے معلوم کرو ۔

جواب : محور ما

۱۱ ۔ خطِ مستقیم ۲لا + ما + ۱۲ = ۰ کا قطب بلحاظ دائرہ لا^{۲} + ما^{۲} - ۴لا + ۳ما - ۱ = ۰ کے معلوم کرو ۔

جواب : (۱ ، -۲)

۱۲ ۔ نقطۂ (۶ ، -۷) سے دائرۂ ۳لا^{۲} + ۳ما^{۲} - ۷لا - ۶ما = ۱۲ کے مماس کا طول معلوم کرو ۔

جواب : ۹ $\sqrt{۳}$

۱۳ ۔ ثابت کرو کہ ع کی تمام قیمتوں کے لیے خطوطِ مستقیم لا جم ع + ما جب ع = ا ، لا جم ع - ما جب ع = ب کے نقطۂ تقاطع کا طریق ایک دائرہ ہے ۔

۱۴ ۔ تین نقطوں (۱ ، ۰) ، (۲ ، ۳) ، (۳ ، -۱) میں سے گزرنے والے دائرہ کی مساوات معلوم کرو اور مرکز کو مبداء مان کر اس مساوات کی تحویل کرو ۔

جواب : ۷لا^{۲} + ۷ما^{۲} - ۳۹لا - ۱۵ما + ۳۲ = ۰ ۔

۱۵ ۔ ایک ایسے دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو مبداء میں سے گزرتا ہے اور محوروں پر حصے ا ، ب کاٹتا ہے ۔

جواب لا^{۲} + ما^{۲} - ا لا - ب ما = ۰ ۔

۱۶ ۔ دائرہ لا^{۲} + ما^{۲} = ۱۶۹ پر کے نقطہ (۵ ، ۱۲) پر عماد کی مساوات معلوم کرو ۔ جواب : ۱۲لا - ۵ما = ۰ ۔

۱۷ ۔ دائرۂ لا^{۲} + ما^{۲} + ۲لا = ۰ کے ان مماسوں کی مساواتیں دریافت کرو جو محور لا کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بنائیں ۔

جواب: ما = لا + ۱/(۱-۲لا) ، ما = لا - ۱/(۱+۲لا)

۱۸ - ثابت کرو کہ دائرہ لا² + ما² = ل² کے دو نقاط (لا۱، ما۱) اور (لا۲، ما۲) کے درمیانی فاصلہ کا مربع ۲ (ل² - لا۱ لا۲ - ما۱ ما۲) ہے۔

۱۹ - اگر ایک نقطہ سے دو ہم مرکز دائروں کے مماس کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ ان کے مربعوں کا فرق نقطۂ مذکورہ کے مقام پر منحصر نہیں ہے۔

۲۰ - ایک خطِ مستقیم کا قطب بلحاظ دائرہ لا² + ما² = ر² کے خطِ مستقیم ل لا + ب ما = ا پر واقع ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ خطِ مستقیم کی مساوات لا - ل ر² = ج (ما - ب ر²) ہے جہاں ج کوئی مستقل ہے۔

۲۱ - نقطہ و میں سے ایک خط کسی سمت میں کھینچا گیا ہے اور یہ ایک ثابت خطِ مستقیم کے نقطہ ن پر ملتا ہے۔ اگر و ن پر ایک نقطہ ق ایسا لیا جائے کہ سطح و ن × و ق مستقل ہو تو ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک دائرہ ہے۔

۲۲ - دائرہ لا² + ما² = ۴ کے لحاظ سے نقاط (۱، ۳)، (۲، ۱)، (۳، -۱) کے قطبی خطوط معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ تینوں خط ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔

جواب: لا + ۳ ما = ۴، ۲ لا + ما = ۴، ۳ لا - ما = ۴

۲۳ - دائرہ لا² + ما² = ۲۵، اور خطِ مستقیم لا - ۷ ما + ۲۵ = ۰ کے نقاطِ تقاطع معلوم کرو اور ثابت کرو کہ ان نقاطِ تقاطع پر دائرہ کے مماسوں کی مشترکہ مساوات (لا - ۷ ما + ۲۵)² = ۲۵ (لا² + ما² - ۲۵) ہے۔

جواب: (-۴، ۳)؛ (۳، ۴)

۲۴ - خطِ مستقیم ۲ لا - ما = ۳ دائرہ لا² + ما² = ۴ کو جن نقطوں پر قطع کرتا ہے ان سے دائرہ کے مماس کھینچے گئے ہیں۔ یہ مماس ایک دوسرے کو نقطۂ ن پر قطع کرتے ہیں۔ ن کے محدد معلوم کرو۔

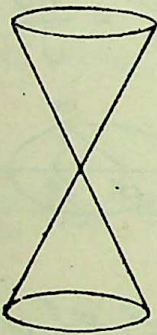
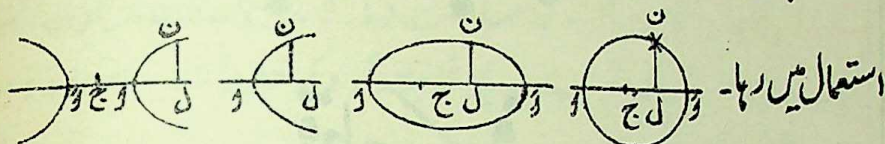
جواب: (۸/۳ ، -۴/۳)

۲۵۔ ثابت کرو کہ نقطہ (۱، ۳) کا قطبی دونوں دائروں
لا² + ما² ـ ۱۱لا + ۱۰ما + ۱۰ = ۰ اور لا² + ما² ـ ۸لا + ۶ما + ۱۰ = ۰ کے
لحاظ سے ایک ہی ہے۔

۲۶۔ ثابت کرو کہ مساوات (ما ـ لا + ۳)² + ۲(لا ـ ۲)(ما + ۲) = ۰
ایک دائرہ کو تعبیر کرتی ہے۔ نیز ثابت کرو کہ خطوط لا = ۲ اور ما + ۲ = ۰
اس دائرہ کے مماس ہیں۔

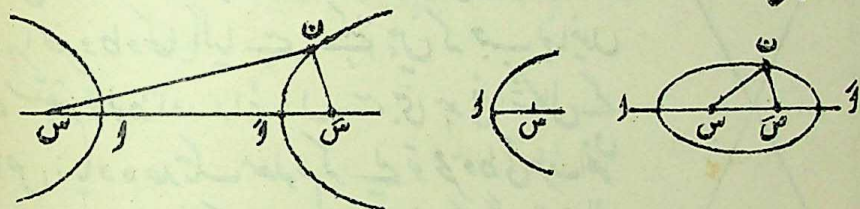
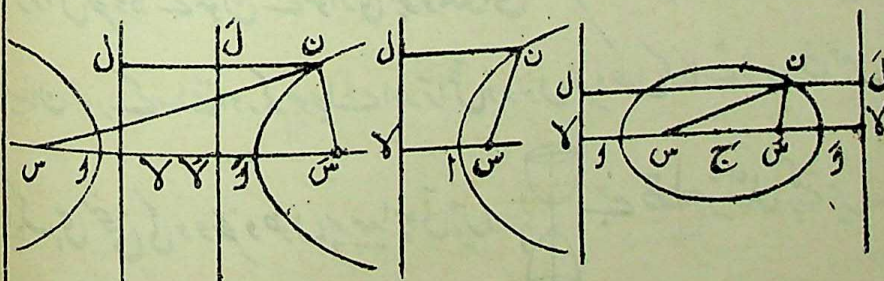
چوتھا باب

قطع مکافی

۱۴۱۔ مخروطی تراشیں ۔ طالب علم مخروط کی شکل سے واقف ہے مثلاً ساتھ کی شکل میں ایک دوہرا مخروط دکھایا گیا ہے۔ کہتے ہیں کہ جب یونانیوں نے مستقیم خطوط اور دائروں سے بنی ہوئی اشکال کے خواص زیادہ حد تک معلوم کر لیے تو مخروط کی طرف انھوں نے اپنی توجہ مبذول کی۔ قایم مستدیر مخروط کو اگر مستوی سطحوں سے تراشا جائے تو مستوی منحنی پیدا ہوتے ہیں، یعنے ایسے منحنی جن پر کے تمام نقطے ایک مستوی میں (کاغذ یا بورڈ کی سطح میں) آسکتے ہیں۔ واضح ہو کہ اگر قایم مستدیر مخروط کو ایک مستوی سے محور کے علی القوایم کاٹا جائے تو دائرہ پیدا ہوتا ہے، اگر مستوی تراش محور کے ساتھ مائل ہو تو ناقص لَ ل' اگر تراش مخروط کے مکون کے متوازی ہو تو مکافی اور اگر تراش کا میلان محور کے ساتھ اور کم ہو جائے اور تراش دونوں مخروطوں کو کاٹے تو دو شاخیں ایک ہی منحنی کی دو مخروطوں پر پیدا ہوتی ہیں جسے قطع زائد کہتے ہیں۔

ایپولونیس (Apollonious) ۲۶۰تا۲۰۰ قبل مسیح نے ان تین مخروطی تراشوں پر ایک مبسوط رسالہ لکھا جو سولھویں صدی عیسوی تک بطور درسی کتاب کے استعمال میں رہا۔

اس نے مخروط کی وہی مجسّم شکل استعمال کر کے، مخروطی تراشوں کے لیے یہ مشترک خاصیت حاصل کی کہ

$$\frac{ن ل^2}{ا ل \times ل اَ} = \text{مستقل}$$

(ناقص (دائرہ) اور زائد کے لیے)

اور $\frac{ن ل^2}{ا ل} = \text{مستقل}$ مکافی کے لیے۔ اس نے مخروطی تراشوں کے ماسکے اور ان کے بعض مشہور خواص معلوم کیے، اسے یہ بھی معلوم تھا کہ ناقص کی صورت میں س ن + سَ ن = مستقل = ا اَ اور زائد کی صورت میں س ن - سَ ن = مستقل = ا اَ ۔ اس کے پانچ سو سال بعد پیپس (اسکندریہ) نے مرتبوں

لال اور لالَ کو دریافت کیا اور یہ معلوم کیا کہ ہر مرتب، ساتھ کے ماسکہ سے متعلق ہے - اور تینوں مخروطی تراشوں کے لیے "ماسکہ مرتب" خاصیت یا تعریف

حاصل کی - یعنی یہ کہ ہر مخروطی تراش میں $\frac{\text{س ن}}{\text{ن ل}}$ = مستقل (ز) منحنی پر ن کے تمام مقامات کے لیے اور یہ نسبت

اگر کم ہو ایک سے یعنی ز < ۱ تو منحنی قطع ناقص

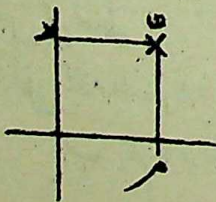
اگر برابر ایک سے " ز = ۱ تو منحنی " مکافی

اگر بڑی ایک سے " ز > ۱ تو منحنی " زائد ہوگا۔

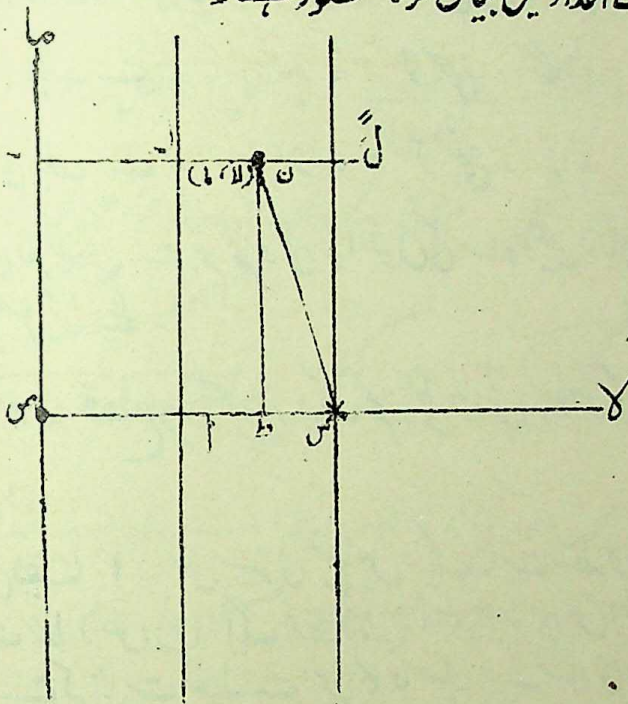
پس ان ہندسی تعریفوں سے ہم مخروطی تراشوں کی مساواتیں اور ان سے ان کے تمام خواص حاصل کرینگے ۔

۲،۴ - قطع مکافی ایک مخروطی تراش ہے، اس کی تعریف یہ ہے :-

تعریف ۱ - کسی مستوی سطح میں، ایک ثابت نقطہ (س) ہے اور ایک ثابت خط (ص ل)، ایک نقطہ (ن) اُسی مستوی میں اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ثابت نقطہ سے اس کا فاصلہ، ہمیشہ مساوی رہتا ہے ثابت خط سے اس کے عمودی فاصلہ کے (س ن = ن ل)، ن کے طریق کو قطع مکافی کہتے ہیں۔

تعریف ۲ - ایک مستوی میں دو ثابت علی القوائم خط ہیں، ایک نقطہ ن خطوں کے مستوی میں اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک خط سے اس کے عمودی فاصلہ کا مربع ایسے بدلتا ہے جیسے دُوسرے خط سے اس کا عمودی فاصلہ، ($\frac{\text{ن م}^2}{\text{ن د}}$ = مستقل)

نقطہ ن کا طریق قطع مکافی کہلاتا ہے ۔
ہم دیکھینگے کہ ان دونوں تعریفوں سے ایک ہی قطع مکافی ملتا ہے، فی الحقیقت یہ دونوں تعریفیں ایک ہی ہیں ۔
تعریف ا کے بموجب متحرک نقطہ ن اس ہندسی ربط کو پورا کرتا ہے

$$س ن = ن ل$$

جہاں س ثابت نقطہ ہے اور ص ل ثابت خط ہے، اس ہندسی ربط کو الجبرا کے اعداد میں بیان کرنا مقصود ہے ۔

س سے ثابت خط پر عمود س ص کھینچو ۔ ص ثابت نقطہ حاصل ہوگا اور ص س ثابت خط ہوگا ۔
نیز س ص ثابت فاصلہ ملیگا ۔ فرض کرو کہ س ص = ۲ ا، اگر ص س کی نقطہ ا پر تنصیف کی جائے تو فاصلہ ص ا = ا س = ا جہاں ا مستقل مقدار ہے ۔
اب ہم دو ثابت خطوں ص ل اور ص س کو بالترتیب محاور ما و رلا

لیتے ہیں - اور ان کے نقطۂ تقاطع ص کو مبداء - واضح ہو کہ نقاط ص، ا، س تینوں ثابت نقطے ہیں، ان میں سے گزرنے والے ص ل کے متوازی خط، ثابت خط ہونگے، نقاط ص، ا، س میں سے کسی کو مبداء لیا جا سکتا ہے اور خط ص س کو محور لا اور ان نقطوں میں سے ص ل کے متوازی خط کو محور ما۔

سب سے پہلے ہم مبداء نقطہ ص پر لیتے ہیں اور ص س کو محور لا اور ص ل کو محور ما۔

نقطہ س کے محدّد ہیں (۲ ل، ۰) اور متحرک نقطہ ن کے (لا، ما)۔

اب ہندسی رشتہ، ن کے طریق کے لیے ہے $\text{س ن} = \text{ن ل}$

یعنی $\text{س ن}^2 = \text{ن ل}^2$

$(\text{لا} - 2\text{ل})^2 + \text{ما}^2 = \text{لا}^2$ کیونکہ $\text{ن ل} = \text{ط ص} = \text{لا}$

$- 4\text{ل لا} + 4\text{ل}^2 + \text{ما}^2 = 0$

یعنی $\text{ما}^2 = 4\text{ل}(\text{لا} - \text{ل})$ .... (۱)

یہ ن کے طریق یعنی قطع مکافی کی مساوات ہے مبداء ص اور محوروں ص س، ص ل کے لحاظ سے - اب مبداء کو نقطہ ا پر لو اور محور لا خط ا س اور محور ما خط ا ل، جو ص ل کے متوازی ہے (دیکھو شکل بالا)۔ واضح ہو کہ مبداء کو ہم ص سے ہٹا کر ا پر لیجانا چاہتے ہیں اور نئے محوروں کو پرانے محوروں کے متوازی (محور لا وہی رہتا ہے) رکھتے ہیں۔ نئے مبداء ا کے محدّد بلحاظ پرانے مبداء اور محوروں کے (ل، ۰) ہیں پس نئے اور پرانے محدّدوں میں رشتہ ہوگا -

(پرانا) $\text{لا} = $ (نیا) $\text{لاَ} + \text{ل}$
(〃) $\text{ما} = $ (〃) $\text{ماَ} + 0$

پس مساوات (۱) کے لا، ما کی بجائے بالترتیب لاَ + ل اور ماَ رکھ دینا چاہیے

جہاں لاَ، ماَ نئے محدّد ہیں - (۱) میں اس اندراج سے نئی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

$\text{ماَ}^2 = 4\text{ل}(\text{لاَ} + \text{ل} - \text{ل})$

یعنی
مآ۲ = ۴ ل لاَ

یا اگر یہ ہمارے ذہن میں رہے کہ اب محدّد نئے ہیں تو زبر حذف کر دیے جا سکتے ہیں، پس نئی مساوات ہے

ما۲ = ۴ ل لا .... (اَ)

جو سادہ ترین شکل میں ہے، جسے معیاری صورت کہتے ہیں یاد رہے یہ مساوات بلحاظ ا مبداء اور محاور اس اور الٔ کے ہے۔ ان محوروں کو اصلی محور کہتے ہیں۔

اگر س کو مبداء لیا جائے اور ص اس لا کو محور لا اور س میں سے ص ل کے متوازی خط س لٔ مخروجہ کو محور ما تو چونکہ نئے مبداء س کے محدّد بلحاظ ل کے (ل، ۰) ہیں۔ اس لیے بلحاظ اس حوالہ کے نظام کے منحنی کی مساوات اس تحویل سے حاصل ہوگی۔

لا = لاَ + ل

ما = مآ + ۰

(ا) میں اس اندراج سے مساوات حاصل ہوگی

مآ۲ = ۴ ل (لاَ + ل)

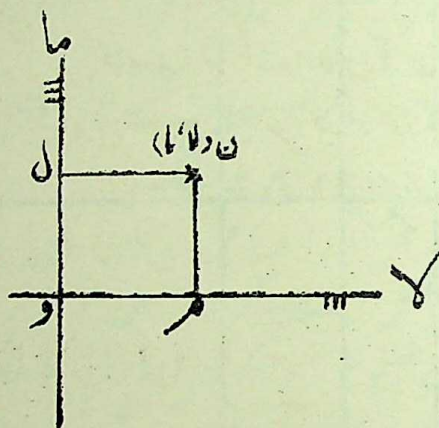
یا اگر یہ ذہن میں ہے کہ مبداء س ہے اور محور س لا اور س لٔ ہیں تو زیر نکال دینے سے مساوات حاصل ہوتی ہے

ما۲ = ۴ ل (لا + ل) .... (اً)

اسی طرح کوئی اور نقطہ مبداء لیا جا سکتا ہے اور اس میں سے گزرنے والے پرانے محوروں کے متوازی خط نئے محور لیے جا سکتے ہیں اور منحنی کی مساوات کو نئے محوروں کے لحاظ سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ یاد رہے کہ منحنی وہی ہے، منحنی نہیں بدلتا مگر اس کا جبریہ نام یا مساوات بدل جاتی ہے جیسے مبداء

اور محوروں کو بدلا جائے ۔

مساواتوں (۱)، (۱َ)، (۱ً) سے ہم دیکھتے ہیں کہ مکافی کی مساوات درجۂ دوم کی ہے، درجۂ دوم کی رقم ما^{2} ہے جو مربع کامل ہے۔

واضح ہو کہ مکافی کی سادہ سے سادہ مساوات $\text{ما}^{2} = ۴\,\text{ا}\,\text{لا}$ ہے۔ اس مساوات سے ہم اس کی شکل کا اندازہ لگاتے ہیں۔ نیز ہم دیکھینگے کہ مکافی کے تمام خواص اس مساوات میں مضمر ہیں۔ انھیں ہم حاصل کرنے کی کوشش کرینگے۔

تعریف ۲ سے

مستوی میں دو ثابت خط و م لا اور و ل ما ہیں اور $\frac{\text{ن م}^{2}}{\text{ل ن}}$ مستقل

خطوں کے تقاطع کو مبداء و لو اور جس خط پر عمود کا مربع لیا جاتا ہے اس کو محور لا اور دوسرے کو محور ما۔ اب

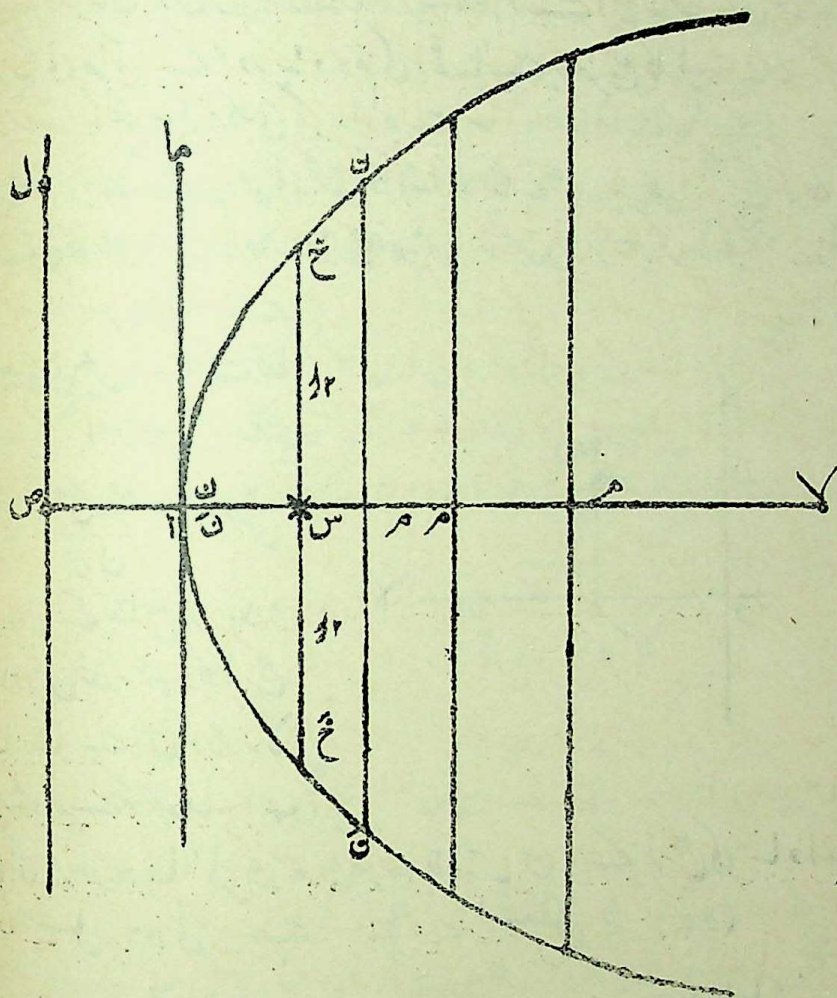
چونکہ ن م = ما، ل ن = و م = لا پس ن کے طریق کی مساوات حاصل ہوتی ہے $\frac{\text{ما}^{2}}{\text{لا}} = \text{مستقل} = (۴\,\text{ا})$

تو مساوات ملتی ہے $\text{ما}^{2} = ۴\,\text{ا}\,\text{لا}$ جو وہی مساوات ہے جو پہلے حاصل ہوئی۔

و لا (یعنی ما = ۰) کو مکافی کا محور کہتے ہیں اور و ما کو راس پر کا مماس۔ ہم ابھی دیکھینگے کہ ان ناموں کی کیا وجہ ہے۔

۳، ۴ ۔ مکافی کی شکل،

اگر ا مبداء، ا لا محور لا، ا ما محور ما ہو تو منحنی کی مساوات $\text{ما}^{2} = ۴\,\text{ا}\,\text{لا}$ ہے،

جہاں اس = ص ا = ل ۔

(۱) ہم دیکھتے ہیں کہ مبداء ا (۰،۰) منحنی پر واقع ہے کیونکہ مساوات ما² = ۴ ل لا میں (۰،۰) مندرج کریں تو مساوات پوری ہوتی ہے۔

(۲) مساوات ما² = ۴ ل لا سے ما = ± ۲ √(ل لا)،
اگر ل کو مثبت مقدار مانا جائے تو ہم دیکھتے ہیں کہ لا کی کسی مثبت قیمت کے لیے، ما کی دو مساوی اور مختلف العلامت قیمتیں حاصل ہوتی ہیں،

یعنی ا کے دائیں جانب خط اس لا پر، لا کی کسی قیمت کے مماثل، اُوپر نیچے مساوی فاصلوں پر منحنی پر نقطے واقع ہیں۔ اسے یوں بیان کرتے ہیں کہ منحنی (مکافی) محور لا، اس لا کے گرد متشاکل ہے، یعنی اس خط سے اُوپر منحنی کا جو حصّہ ہے وہ نچلے حصّہ کا خیال ہے۔

نیز ہم دیکھتے ہیں کہ اگر لا منفی ہو تو ما = ± ۲ √(ا لا) سے ما کی حقیقی قیمتیں نہیں ملتیں، یعنی منحنی پر کے نقطے خیالی ہیں، یعنی ۲ کے بائیں جانب منحنی کا کوئی حصّہ واقع نہیں ہوتا۔ پس منحنی بالتمام ا کے دائیں جانب واقع ہوتا ہے اور خط اس لا کے گرد متشاکل ہے۔

ظاہر ہے کہ اگر خط ا لا پر کے کسی نقطہ م سے عمود یا معین کھینچا جائے تو اس پر کے نقطے ن اور نَ مکافی پر واقع ہونگے۔

اگر س ن = ل ن = ص م اور یہ ص م معین کے پایہ کا فاصلہ ہے مرتب سے، پس ن، نَ حاصل کرنے کے لیے، س کو مرکز مان کر، م ص کی دُوری پر ایک قوس کھینچو جو معین کو ن اور نَ پر کاٹے، پس ن، نَ دو نقطے محور ا لا سے مساوی عمودی فاصلہ پر مل گئے۔ اس طرح بے شمار نقطوں کے جوڑے حاصل ہو سکتے ہیں۔ جب م، س پر ہو تو س ص = ۲ ا، س میں سے معین پر نقاط ن، نَ فاصلہ ۲ ا پر واقع ہونگے، ان کو اگر خ اور خَ سے تعبیر کیا جائے تو س خ = خَ س = ۲ ا، نیز ہم جانتے ہیں اس = ا، خ س خَ کو وترِ خاص کہتے ہیں جب م، ا کے پاس ہو تو مرتب سے اس کا فاصلہ تقریباً ا ص کے مساوی ہوگا اور س سے ا ص کی دُوری پر نقطہ ۲ کے پاس دائیں جانب اُوپر اور نیچے ایک دُوسرے کے نہایت قریب دو نقطے ن، نَ ملینگے، گویا ا ما اِن دو نقطوں میں سے گزرنے والا خط ہوگا یعنی ا ما منحنی کا نقطہ ا پر مماس ہوگا۔ جیسے م دائیں جانب حرکت کریگا، م ص بڑھتا جائیگا اور س ن جو م ص کے مساوی ہوتا ہے وہ بھی بڑھتا جائیگا۔ گویا دائیں جانب منحنی لا انتہا فاصلہ تک پھیلتا ہے۔

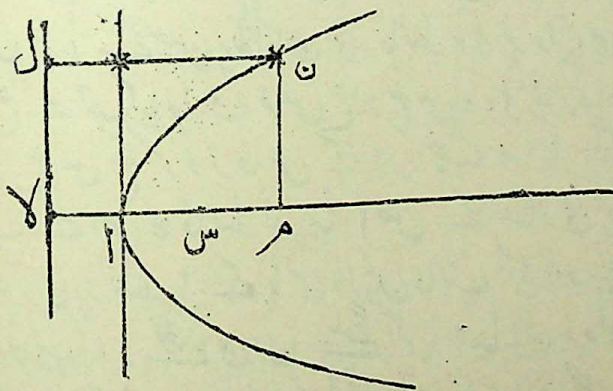
مثال ۳۔ اوپر ہم نے دیکھا ہے کہ ا ما نقطہ ا پر مکافی کا مماس ہے، اسے ہم یوں بھی دیکھ سکتے ہیں۔ ا ما کی مساوات لا = ۰ ہے خط ا ما جہاں پر منحنی ما^2 = ۴ ا لا کو کاٹتا ہے وہاں پر دونوں مساواتیں ما^2 = ۴ ا لا اور لا = ۰ پوری ہوتی ہیں پس نقاطِ تقاطع کے لیے ما^2 = ۰ یعنی ما = ۰، ۰ اس کے مماثل لا کی قیمتیں صفر اور صفر حاصل ہوتی ہیں، یعنی نقاطِ تقاطع، مبدا اور مبداء ہیں۔ پس خط ا ما، ا پر کا مماس ہے

اس لا کو مکافی کا محور کہتے ہیں، ہم نے دیکھا ہے کہ اس خط کے گرد منحنی متشاکل ہے، اوپر اور نیچے کے حصے گویا اس خط میں، ایک دوسرے کے خیال ہیں۔ اس کو محور لا لیا گیا ہے۔

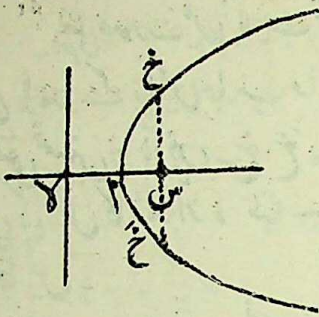
نقطہ ا مکافی کا راس کہلاتا ہے۔ معیاری صورت حاصل کرنے کے لیے اس کو مبداء مانا گیا ہے۔

خط ا ما راس پر کا مماس ہے، اس کو محور ما مانا گیا ہے۔

ن م معین ہے اور ن م نَ دوہرا معین کہلاتا ہے۔ خ خَ وترِ خاص کا طول = ۴ ا ۔ یا $\frac{ما^2}{لا}$ = ۴ ا

واضح ہو کہ مساوات ما^2 = ۴ ا لا ہندسی خطوط کی رقوم میں حسب ذیل ہوگی۔

$\frac{ن م^2}{ل ن}$ = وترِ خاص کا طول = خ خَ، یا ن م^2 = خ خَ × ل ن

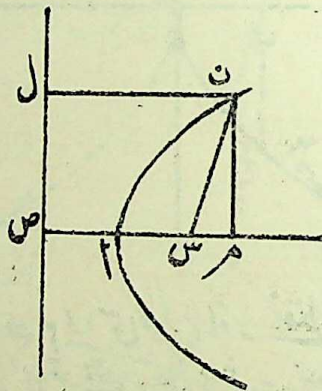
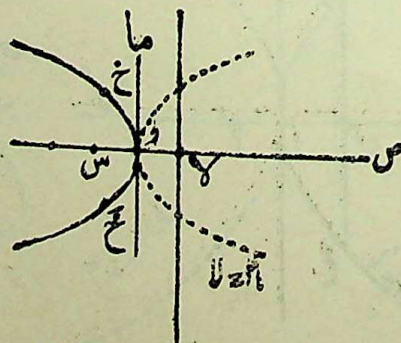
مثال ۱۔ منحنی ما^2 = ۲ لا میں وترِ خاص کا طول ۴ ا = ۲،

یعنی ا = ½ ا س = ½،

س خ = خَ س = ا،

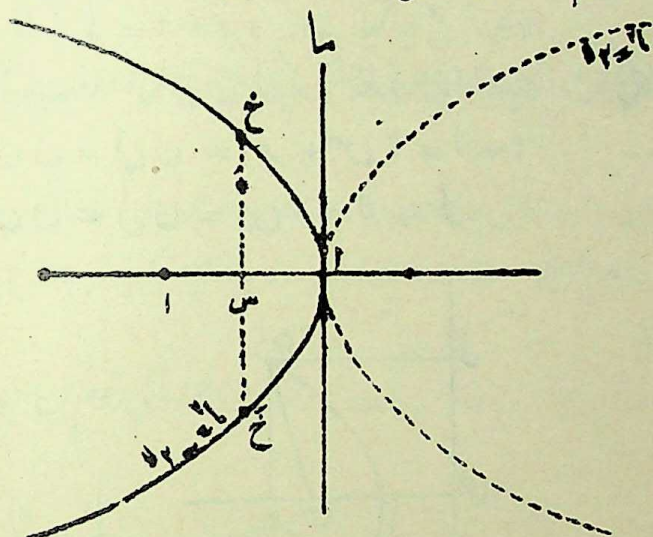
ا خ خَ میں سے منحنی کھینچا گیا ہے
دیکھو شکل، منحنی پر اور نقطے لیے
جا سکتے ہیں، مثلاً جب لا یعنی ا م = ا،
تو ما^{۲} = ۲ یعنی ما = ± √۲ = ± ۱٫۴۱۴۲ ....
جب، لا = ۲، تو ما = ۲ وغیرہ

مثال ۲ - فاصلہ س ن معلوم کرو، نقطہ ن (لا، ما) ہے اور مکافی کا ا س = ا،

س ن = ل ن = ا م + ص ا = لا + ا

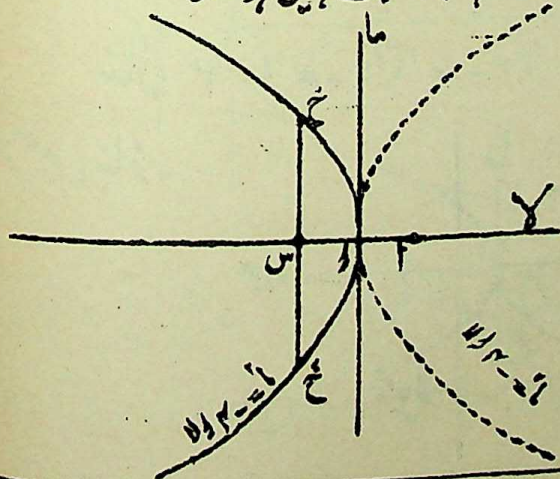
پس س ن = ل ن = ص م = لا + ا

مثال ۳ ما^{۲} = - لا، ما^{۲} = -۲ لا، ما^{۲} = -۴ ا لا کی
ترسیمیں بناؤ۔

پہلی صورت میں، لا جب مثبت ہے تو ما خیالی ہوتا ہے اس لیے منحنی ا ما کے دائیں جانب واقع نہیں ہوتا ۔ لا جب منفی ہے تو ما کی دو حقیقی قیمتیں ہوتی ہیں ۔ خ خَ = ۱ اور س خ = ۲ س ا = س خَ جس سے منحنی کی شکل کا اندازہ ملتا ہے پوری صحت کے لیے اور نقطے مرتسم کیے جائیں ۔

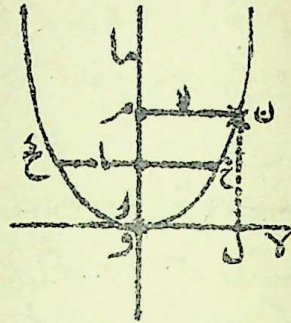
ما۲ = -۲ لا، لا مثبت نہیں ہو سکتا، تمام منحنی و ما کے بائیں جانب واقع ہے،

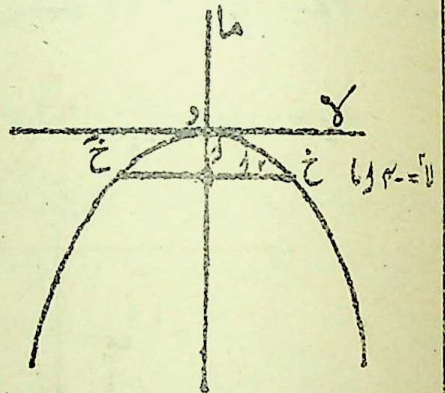
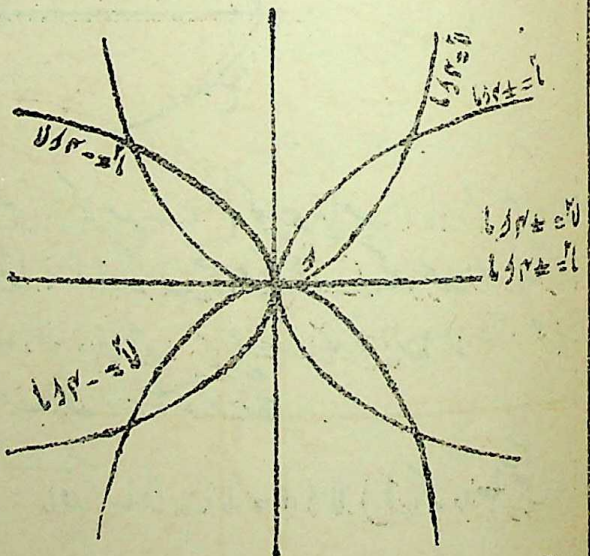
ا = ۲ اس = - ۲/۴ = - ۱/۲ مطلق قیمت س خ = س خَ = ۱

جب، لا = -۲، ما = ± ۲، اسی طرح اور نقطے مرتسم کیے جائیں ۔

ما۲ = -۴ ا لا، (ا مثبت ہے) لا مثبت نہیں ہو سکتا،

ا س = - ا

س خ = خَ س = ۲ ا

(مطلق قیمت) اس شکل میں ا ما کے بائیں جانب ما۲ = - ۴ ا لا کی ترسیم ہے اور دائیں جانب ما۲ = ۴ ا لا کی ۔

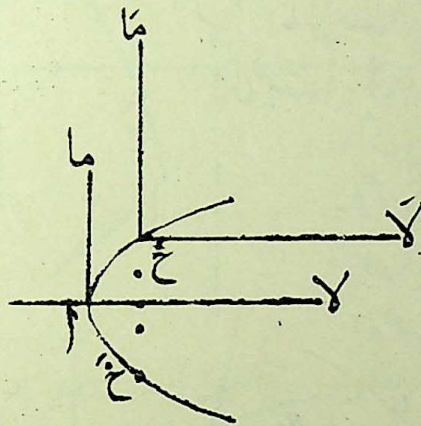
مثال ۴ - ذیل کے منحنیوں کی ترسیم بناؤ، لا۲ = ۴ ا ما، لا۲ = - ۴ ا ما
اور ایک ہی شکل میں لا۲ = ± ۴ ا ما، ما۲ = ± ۴ ا لا کی ترسیم بناؤ -

مساوات سے و ل۲ = ۴ ا × ل ن
یا م ن۲ = ۴ ا × و م
یا م ن۲ / و م = ۴ ا (مستقل)

پس ن کا طریق مکافی ہے، جس کا محور، محور ما ہے اور راس پر کا مماس محور لا اور وتر خاص خ خَ = ۴ ا
ما کی قیمت مثبت نہیں ہو سکتی کیونکہ لا کی قیمت خیالی ہو گی -
ما کی ہر منفی قیمت کے لیے لا کی دو قیمتیں ہیں، منحنی محور ما کے گرد متشاکل ہے اور محور لا سے بالتمام نیچے واقع ہوتا ہے -
ما۲ = ± ۴ ا لا، محور لا کے گرد متشاکل، ایک منحنی محور ما کے دائیں جانب واقع ہے دوسرا بائیں جانب -
لا۲ = ± ۴ ا ما، منحنی محور ما کے گرد متشاکل ہیں، ایک منحنی محور لا سے اوپر واقع ہے دوسرا نیچے -

مثال ۵۔ مکافی ما۲ = ۴ ل لا میں مرتب، محور، راس پر کے مماس، وترِ خاص کی مساواتیں لکھو (مرتب کی مساوات لا = - ل، مکافی کا محور ما = ۰، راس پر کا مماس لا = ۰، وترِ خاص لا = ل)

مثال ۶۔ ان منحنیوں کو مرتسم کرو

ما۲ = ۳ لا، لا۲ = ۲ ما، ما۲ = - ۲ لا، ما۲ = - ۷ لا

۱۳۱ء۴ ۔ مکافی کی مساوات جبکہ اس کے مستوی ہیں، مبداء کہیں لیا جائے اور حوالہ کے محور مکافی کے محور اور راس پر کے مماس کے متوازی ہوں۔

مکافی کی سادہ سے سادہ شکل میں مساوات ہے ما۲ = ۴ ل لا

فرض کرو کہ وترِ خاص کے سرے خ کو ہم نیا مبداء مانتے ہیں اور نئے محور نقطہ خ میں سے پرانے محوروں یعنی مکافی کے محور اور راس پر کے مماس کے بالترتیب متوازی ہیں۔ خ کے محدد ہیں (ل، ۲ ل) اور پرانے اور نئے محددوں میں رشتے ہونگے۔

لا = لَا + ل
ما = مَا + ۲ ل

اور مساوات ما۲ = ۴ ل لا بدل کر ہو جائیگی۔

(مَا + ۲ ل)۲ = ۴ ل (لَا + ل)

یعنی $ما'^2 + ۴ ل ما' - ۴ ل لا' = ۰$

یا زبریں حذف کرنے سے نئی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

$ما^2 + ۴ ل ما - ۴ ل لا = ۰$ (۱)

ہم دیکھتے ہیں کہ درجہ دوم کی رقمیں مربع کامل بناتی ہیں، مستقل رقم نئی مساوات میں بھی موجود نہیں کیونکہ مبداء خ منحنی پر واقع ہے۔

فرض کرو کہ مبداء کو کسی نقطہ (ھ، ک) پر لے جاتے ہیں تو $ما^2 = ۴ ل لا$ ہو جائیگی۔

$(ما + ک)^2 = ۴ ل (لا + ھ)$

$ما^2 + ۲ ک ما - ۴ ل لا + ک^2 - ۴ ل ھ = ۰$

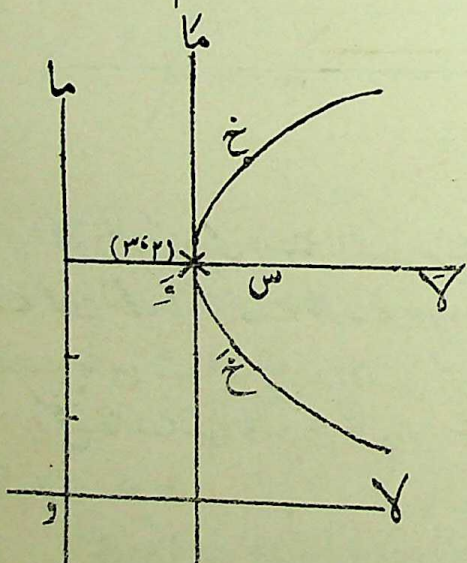
پس اگر مستوی میں کے کسی نقطہ کو مبداء مانا جائے اور نئے حوالہ کے محور پرانے محوروں کے متوازی رہیں تو تبدیل شدہ مساوات کی یہ شکل ہوتی ہے

$ما^2 + ل لا + ب ما + ج = ۰$

مثال ۱۔ منحنی $ما^2 - ۲ لا - ۶ ما + ۱۱ = ۰$ کو مرتسم کرو۔

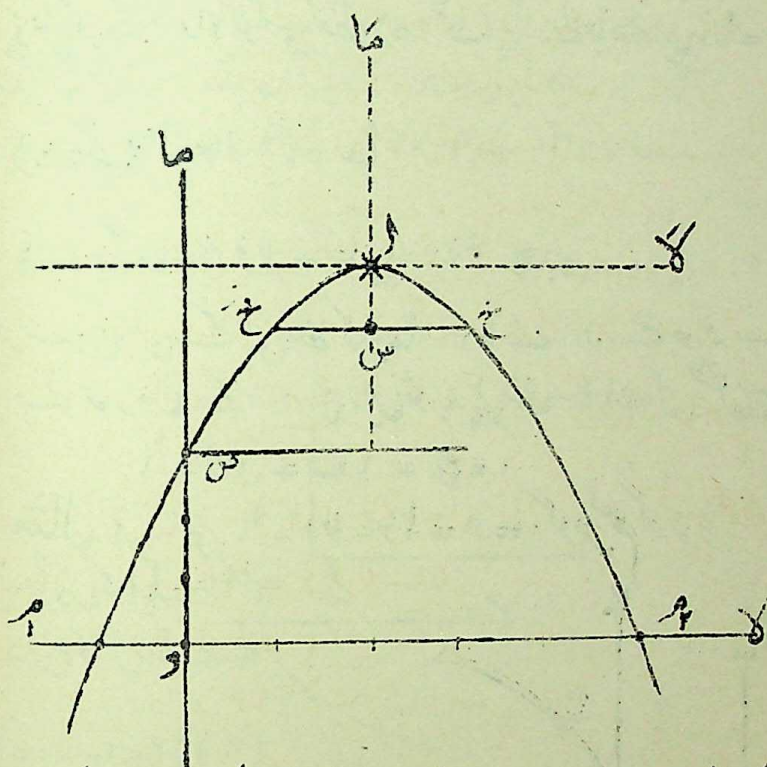
ما والی رقموں کو ایک ساتھ لے کر مربع کامل بنانے سے

$(ما - ۳)^2 = ۲ لا - ۲ = ۲ (لا - ۱)$

مبداء کو (۱، ۳) پر لے جانے سے مساوات ہو جاتی ہے $ما'^2 = ۲ لا'$ جو قطع مکافی ہے اور جس کا وتر خاص ۲ ہے اس کی ترسیم یہ ہوگی۔

مثال ۲۔ $لا^2 - ۴ لا + ۲ ما - ۵ = ۰$ کی ترسیم بناؤ۔

اس سوال میں لا^۲ مساوات میں شریک ہوتا ہے، اور ما^۲ شریک نہیں ہوتا
اس لیے لا والی رقموں کو ایک ساتھ لے کر مربع کامل بنانے سے

(لا − ۲)^۲ = − ۲ ما + ۹ = − ۲ (ما − ۹/۲)

مبداء کو (۲، ۹/۲) پر لے جانے سے لاَ^۲ = − ۲ ماَ

اس مکافی کا وترِ خاص ۲ ہے۔ اس کی ترسیم اوپر کی شکل میں دی گئی ہے،
اس میں نیا محور لاَ راس پر کا مماس ہے اور نئے محور ماَ کا منفی حصہ مکافی کا
محور ہے۔

منحنی پرانے محور لا کو کاٹتا ہے جہاں اصلی مساوات میں ما = ۰ رکھنے سے
لا^۲ − ۴ لا − ۵ = ۰ یعنی لا = ۵ یا − ۱ (نقاط م۱، م۲)
منحنی پرانے محور ما کو وہاں کاٹتا ہے جہاں اصلی مساوات میں لا = ۰ رکھنے
سے ملتا ہے، ما = ۵/۲ (نقطہ ص)

مثال ۳۔ ان منحنیوں کو مرتسم کرو، رأس کے محدّد، وترِ خاص کا طول اور اس کی مساوات، مرتب اور محور کی مساواتیں دریافت کرو۔

(ا) ۲ ما² ـ لا ـ ۱۲ ما + ۱۸ =۰
(ب) لا² ـ ۶ لا ـ ۴ ما + ۵ =۰
(ج) ۲ ما² ـ ۲ لا ـ ۱۲ ما + ۷ =۰،

جواب (ا) رأس (۰، ۳)، وترِ خاص کا طول ½، مساوات ۸ لا ـ ۱ =۰،
مرتب کی مساوات ۸ لا + ۱ =۰، محور کی مساوات ما ـ ۳ =۰۔
(ب) رأس (۳، ـ۱)، وترِ خاص کا طول ۴، اس کی مساوات ما =۰،
مرتب کی مساوات ما + ۲ =۰، محور کی مساوات لا ـ ۳ =۰۔
(ج) رأس (ـ ۱۱/۲، ۳)، وترِ خاص ۱، مساوات ۴ لا + ۲۱ =۰،
مرتب کی مساوات ۴ لا + ۲۳ =۰، محور کی مساوات ما ـ ۳ =۰۔

مثال ۴۔ ذیل کے منحنیوں کے راس، ماسکے، وترِ خاص معلوم کرو اور وترِ خاص، رأس پر کے مماس، مرتب کی مساواتیں دریافت کرو۔

(ا) (ما ـ ۳)² = ۲ (لا ـ ۱)
(ب) (لا ـ ۲)² = ۴ (ما ـ ۱)
(ج) ۲ لا² + ۳ ما ـ ۸ لا ـ ۶ =۰۔
(د) (ما ـ ا)² = ب (لا ـ ج)

جواب (ا) رأس (۱، ۳)، ماسکہ (۳/۲، ۳)، وترِ خاص طول ۲،
وترِ خاص مساوات ۲ لا ـ ۳ =۰۔ رأس پر کا مماس مساوات لا ـ ۱ =۰، مرتب ۲ لا ـ ۱ =۰
(ب) رأس (۲، ۱)، ماسکہ (۲، ۲)، وترِ خاص طول ۴،
وترِ خاص مساوات ما ـ ۲ =۰۔ رأس پر کا مماس مساوات لا ـ ۱ =۰،
مرتب ما =۰۔
(ج) رأس (۲، ـ۲)، ماسکہ (۲، ـ ۱۳/۸)، وترِ خاص ۳/۲،
وترِ خاص مساوات ۸ ما ـ ۱۳ =۰، رأس پر کا مماس مساوات ما ـ ۲ =۰۔

مرتب مساوات ۸ ما - ۱۹ = ۰

(د) راس (ا، ج) ماسکہ (ا + $\frac{ب}{۴}$، ج)، وترِ خاص
طول ب، مساوات لا = ا + $\frac{ب}{۴}$ راس پر کا مماس
مساوات لا = ا، مرتب لا = ا - $\frac{ب}{۴}$

۳۲،۴ - (ا) نقطہ (لا$_1$، ما$_1$) مکافی ما^2 = ۴ ا لا کے اندر، اوپر
یا باہر واقع ہوگا اگر ما$_1^2$ - ۴ ا لا$_1$ $\lesseqgtr$ صفر -

ساتھ کی شکل میں، مکافی ما^2 = ۴ ا لا کا کوئی معین کھینچا گیا ہے، اور اس
معین پر مکافی کے باہر کوئی نقطہ ن$_1$ (لا$_1$، ما$_1$) ہے، مکافی پر نقطہ ن (لا، ما)
ہے اور مکافی کے اندر نقطہ ن$_2$ (لا$_2$، ما$_2$) ہے - واضح ہو کہ تینوں نقطوں
کے فصلے مساوی ہیں یعنی لا$_1$ = لا = لا$_2$ -

اب ما$_1$ > ما > ما$_2$

یعنی ما$_1^2$ > ما^2 > ما$_2^2$

یعنی ما$_1^2$ > ۴ ا لا > ما$_2^2$ کیونکہ ما^2 = ۴ ا لا، (لا، ما)
مکافی پر ہے -

پس $\text{ما}_1^2 - 4\,\text{ا}\,\text{لا}_1 >$ صفر یعنی $\text{ما}_1^2 - 4\,\text{ا}\,\text{لا}_1$ مثبت ہے باہر کے نقطہ $(\text{لا}_1 ، \text{ما}_1)$ کے لیے، کیونکہ $\text{لا} = \text{لا}_1$

اور $\text{ما}_2^2 - 4\,\text{ا}\,\text{لا}_2 <$ صفر یعنی $\text{ما}_2^2 - 4\,\text{ا}\,\text{لا}_2$ منفی ہے اندر کے نقطہ $(\text{لا}_2 ، \text{ما}_2)$ کے لیے، کیونکہ $\text{لا} = \text{لا}_2$

اسی طرح کسی باہر اور اندر کے نقطوں کے لیے مسئلہ ثابت کیا جا سکتا ہے۔

(ب) ہم جانتے ہیں کہ اگر مکافی کے مستوی میں، مبداء کو کہیں پر لے جائیں اور حوالہ کے محور، مکافی کے محور اور راس پر کے مماس کے متوازی رہیں تو مکافی کی مساوات اس شکل کی ہو جاتی ہے۔

$$\text{ما}^2 + \text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{ما} + \text{ج} = 0$$

اسے یوں لکھ سکتے ہیں:

$$\left(\text{ما} + \frac{\text{ب}}{2}\right)^2 = -\,\text{ا}\,\text{لا} - \text{ج} + \frac{\text{ب}^2}{4} = -\,\text{ا}\left(\text{لا} + \frac{4\text{ج} - \text{ب}^2}{4\text{ا}}\right)$$

مبداء کو $\left(-\frac{4\text{ج} - \text{ب}^2}{4\text{ا}} ، -\frac{\text{ب}}{2}\right)$ پر لے جاؤ اور محور پرانے محدّدوں کے متوازی رہیں۔

تب مکافی کی مساوات ہو جائیگی $\text{ما}'^2 = -\,\text{ا}\,\text{لا}'$ .... (۱)

جہاں $(\text{لا}' ، \text{ما}')$ نئے محدّد ہیں $(\text{لا} ، \text{ما})$ کے مماثل، اور ان میں یہ رشتے ہیں

$$\text{لا}' = \text{لا} + \frac{4\text{ج} - \text{ب}^2}{4\text{ا}} \quad \text{اور} \quad \text{ما}' = \text{ما} + \frac{\text{ب}}{2}$$

اب اگر کوئی نقطہ مکافی کے باہر واقع ہو اور اس کے محدّد بلحاظ پرانے محوروں کے $(\text{لا}_1 ، \text{ما}_1)$ ہوں اور بلحاظ نئے محوروں کے $(\text{لا}'_1 ، \text{ما}'_1)$ تو

اسی دفعہ میں اوپر ہم نے ثابت کیا ہے کہ جب مساوات معیاری شکل میں
ہو جیسے (۱) ہے تو محض نقطہ کے محدد درج کرنے سے جو جملہ
ہا² + ا لا کا پیدا ہوگا وہ مثبت ہوگا۔
اب ہا'² + ا لا' مثبت ہے، واضح ہو کہ یہ رشتہ نقطہ کے محددوں
(لا'، ہا') میں ہے جو بلحاظ نئے محوروں کے ہیں۔ اسی رشتہ کو نقطہ کے مماثل
پرانے محددوں میں بیان کرنے کے لیے رکھنا ہوگا لا' = لا + (۴ا ج − ب²)/۴ا اور
ہا' = ہا + ب/۲، پس رشتہ پرانے محددوں کی رقوم میں ہو جاتا ہے، کہ اگر
(لا، ہا) مکافی کے باہر ہو تو

(ہا + ب/۲)² + ا (لا + (۴ا ج − ب²)/۴ا) مثبت ہوتا ہے

یعنی ہا² + ا لا + ب ہا + ج مثبت ہوتا ہے اور اسی طرح کے
عمل سے ہم حاصل کر سکتے ہیں کہ جب نقطہ (لا'، ہا') مکافی کے اندر ہو تو
ہا² + ا لا + ب ہا + ج منفی ہوگا اور ظاہر ہے کہ جب نقطہ
(لا'، ہا') مکافی کے اوپر ہو تو ہا² + ا لا + ب ہا + ج = ۰۔

پس یہ نتیجہ حاصل ہوا کہ خواہ مکافی کی مساوات، زیادہ عام شکل
ہا² + ا لا + ب ہا + ج = ۰ کی کیوں نہ ہو،

ہا² + ا لا + ب ہا + ج ⋛ صفر ہو جب اس کے کہ (لا، ہا)
مکافی کے باہر واقع ہو یا اوپر یا اندر۔

مثال ۱۔ اس کا معائنہ کرو کہ نقاط (۲، ۳)، (−۵، ۱)، (۳، ۴)
(۲، ۲)، (۱، ۵) مکافی ہا² = ۲ لا کے لحاظ سے کہاں واقع ہیں۔
ہا² − ۲ لا = ۰، (۲، ۳) مساوات میں درج کرنے سے ۹ − ۴ = ۵+،

مکافی کے باہر واقع ہے۔

(۵، -۱) مساوات میں درج کرنے سے ۱ + ۱۰ = ۱۱+ مکافی کے باہر واقع ہے۔
(۷، ۳) " " " ۹ - ۱۴ = - ۵ مکافی کے اندر واقع ہے۔
(۲، ۲) " " " ۴ - ۴ = ۰ مکافی پر واقع ہے۔
(۵، ۱) " " " ۱ - ۱۰ = - ۹ مکافی کے اندر واقع ہے۔

مثال ۲ - اس کا معائنہ کرو کہ نقاط (۱، ۱)، (۱، -۲)، (۰، -۱)

مکافی ۲ ما^2 - ۳ لا + ۷ ما + ۵ = ۰ پر واقع ہیں یا اس کے باہر یا اندر۔

نقطہ (۱، ۱) مساوات کے وائیں رکن میں اندراج سے ۲ (۱)^2 - ۳ (۱) + ۷ (۱) + ۵ مثبت ہے، نقطہ مکافی کے باہر واقع ہے۔ نقطہ (۱، -۲) اندراج سے ۲ (-۲)^2 - ۳ (۱) + ۷ (-۲) + ۵ منفی ہے، نقطہ مکافی کے اندر واقع ہے، نقطہ (۰، -۱) اندراج سے ۲ (-۱)^2 - ۳ (۰) + ۷ (-۱) + ۵ = ۰ نقطۂ مکافی پر واقع ہے۔

مثال ۳ - (ا) ۲ لا^2 = ۳ ما، ۳ ما^2 = ۲ لا، لا^2 = -۲ ما مکافیوں کی مساواتیں ہیں، بتاؤ کہ نقاط (۰، ۰)، (۱، -۲)، (۳، ۹)، (۲، ۲) ان مکافیوں پر واقع ہیں یا باہر یا اندر۔

(ب) بتاؤ کہ نقاط (۰، ۰)، (۱، ۱)، (۲، ۱)، (۳، -۱) مکافیوں ما^2 + ۳ لا - ۲ ما - ۵ = ۰ اور ۲ لا^2 - ۳ ما + ۲ لا - ۱ = ۰ پر واقع ہیں یا ان کے باہر یا اندر۔

۴، ۴ - مکافی کا ماسکہ س (لاَ، ماَ) ہے اور مرتب ل لا + م ما + ن = ۰، مکافی کی مساوات دریافت کرو اور ثابت کرو کہ مساوات میں درجۂ دوم کی رقمیں مربع کامل بناتی ہیں (محور علی القوائم ہیں)

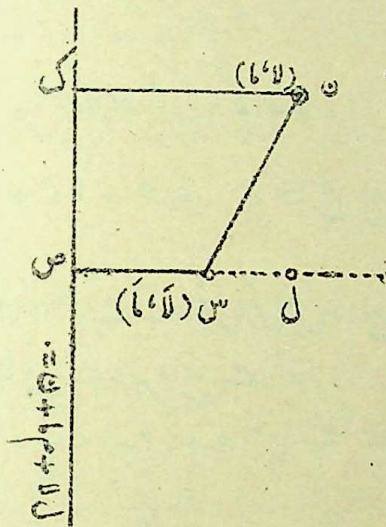
س (لاَ، ماَ) ہے، مرتب ص ک ≡ ل لا + م ما + ن = ۰

اور مکافی پر کوئی نقطہ ن (لا، ما) ہے، اب س ن² = ن ک²

(لا − لاَ)² + (ما − ماَ)² = (ل لا + م ما + ن)² ⁄ (ل² + م²) جو ن سے خط ص ن

یعنی ل لا + م ما + ن = ۰ پر عمود کا طول ہے۔

ک　ن (لا، ما)

ص　س (لاَ، ماَ)　ل

ل لا + م ما + ن = ۰

یہ لا، ما میں دوسرے درجہ کی مساوات ہے۔

پھیلانے سے (ل² + م²)[(لا − لاَ)² + (ما − ماَ)²] = ل² لا² + م² ما² + ن² + ۲ ل م لا ما
+ ۲ ل ن لا + ۲ م ن ما

لا² [(ل² + م²) − ل²] + ما² [(ل² + م²) − م²] − ۲ ل م لا ما − ۲ لا [ن ل + لاَ (ل² + م²)]
− ۲ ما [م ن + ماَ (ل² + م²)] + (ل² + م²) (لاَ² + ماَ²) = ۰

م² لا² + ل² ما² − ۲ ل م لا ما − ۲ لا [ن ل + لاَ (ل² + م²)] − ۲ ما [م ن + ماَ (ل² + م²)]
+ (ل² + م²) (لاَ² + ماَ²) = ۰

یعنی (م لا − ل ما)² − ۲ لا [ن ل + لاَ (ل² + م²)]

- ۲ ما [م ن + ما (ل۲ + م۲)] + (ل۲ + م۲) (لا۲ + ما۲) = ۔

یعنی لا، ما میں درجۂ دوم والی رقمیں مربع کامل بناتی ہیں۔

لا، ما میں درجۂ دوم کی عام سے عام مساوات ہے

ا لا۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

اگر یہ قطع مکافی کو تعبیر کرے تو درجۂ دوم کی رقمیں مربع کامل بنائینگی جس کے لئے شرط یہ ہے کہ ا ب = ھ۲۔ اس کا عکس بھی درست ہے یعنی اگر درجۂ دوم کی عام سے عام مساوات میں، درجہ دوم کی رقمیں مربع کامل بنائیں تو مساوات سے جو منحنی تعبیر ہوتا ہے وہ قطع مکافی ہوگا۔

مثال ۱ - مکافی کا ماسکہ (۱، -۱) ہے اور اس کا مرتب ۲ لا - ۳ ما + ۱ = ۰

اس کی مساوات دریافت کرو۔

منحنی پر نقطہ (لا، ما) فرض کرو۔ نقطہ (لا، ما) کا فاصلہ (۱، -۱) سے مساوی ہوگا اس کے عمودی فاصلہ کے خط ۲ لا - ۳ ما + ۱ = ۰ سے۔

$$\sqrt{(لا-۱)^۲ + (ما+۱)^۲} = \pm \frac{۲ لا - ۳ ما + ۱}{\sqrt{۱۳}}$$

یعنی ۱۳ $\{ (لا-۱)^۲ + (ما+۱)^۲ \} = (۲ لا - ۳ ما + ۱)^۲$

یعنی ۹ لا۲ + ۴ ما۲ + ۱۲ لا ما - ۳۰ لا + ۳۲ ما + ۱۳ = ۰

یعنی (۳ لا + ۲ ما)۲ - ۳۰ لا + ۳۲ ما + ۱۳ = ۰

ہم دیکھتے ہیں کہ درجۂ دوم کی رقمیں مربع کامل بناتی ہیں۔

اور وترِ خاص کا طول، ماسکہ سے مرتب پر کے دوچند فاصلہ کے مساوی ہے

$$\text{وترِ خاص} = ۲ \times \frac{۲\times۱ - ۳(-۱) + ۱}{\sqrt{۱۳}} = \frac{۱۲}{\sqrt{۱۳}} = \frac{۱۲\sqrt{۱۳}}{۱۳}$$

مثال ۲ ۔ (ا) اُس مکافی کی مساوات دریافت کرو جس کا ماسکہ (ا، ۰) ہے اور مرتب لا + ا = ۰، اس کے وترِ خاص کا طول بھی دریافت کرو ۔

جواب $ما^{۲} = ۴ \, ا \, لا$　وتر خاص ۴ ا

(ب) اُس مکافی کی مساوات مطلوب ہے جس کا ماسکہ (۲، –۳) ہے اور مرتب لا – ما + ۱ = ۰ ۔

جواب $(لا + ما)^{۲} - ۱۰ لا + ۱۴ ما + ۱۸ = ۰$　وتر خاص طول $۳\sqrt{۲}$

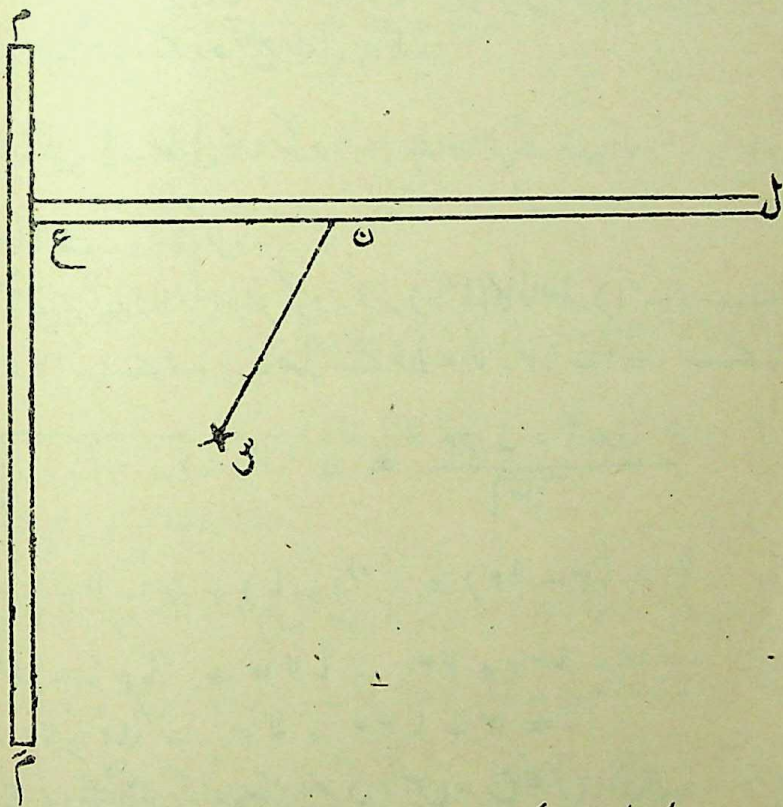
۱۴۴ ۔ مکافی کو مرتسم کرنے کا عملی طریقہ ۔

م

ل

ع　ن

ق

مَ

فرض کرو کہ ہمیں ایک مکافی مرتسم کرنا ہے جس کا ماسکہ س ہے اور مرتب م مَ ۔ م مَ پر ایک پٹری کا کنارہ رکھو ۔

اور ایک اور پٹری ل ن ع کو پٹری م مَ پر عمود وار رکھو۔
ایک بے لچک ڈوری لو جس کا طول پٹری ل ع کے طول کے مساوی ہو اور ڈوری کا
ایک سرا پٹری ل ع کے سرے ل پر اور دوسرا سرا ثابت نقطہ س پر باندھو۔
اب پنسل کی نوک کے ذریعہ ڈوری کو اس طرح تنا کر پکڑو کہ پنسل کی نوک ن
پٹری ل ع پر رہے اور ڈوری کے دونوں حصّے ل ن اور ن س تنے رہیں۔
اگر ان شرائط کے ماتحت پٹری ل ن ع کو اس طرح ہٹایا جائے کہ ل ع
عمود وار رہے م مَ پر تو پنسل کی نوک ن ایک مکافی مرتسم کریگی۔ جس کا
ماسکہ س ہے اور مرتب م مَ ہے۔

چونکہ ڈوری کا طول پٹری ل ن ع کے طول کے مساوی ہے

اس لیے ل ن + ن س = ل ع = ل ن + ن ع

اس لیے ن س = ن ع

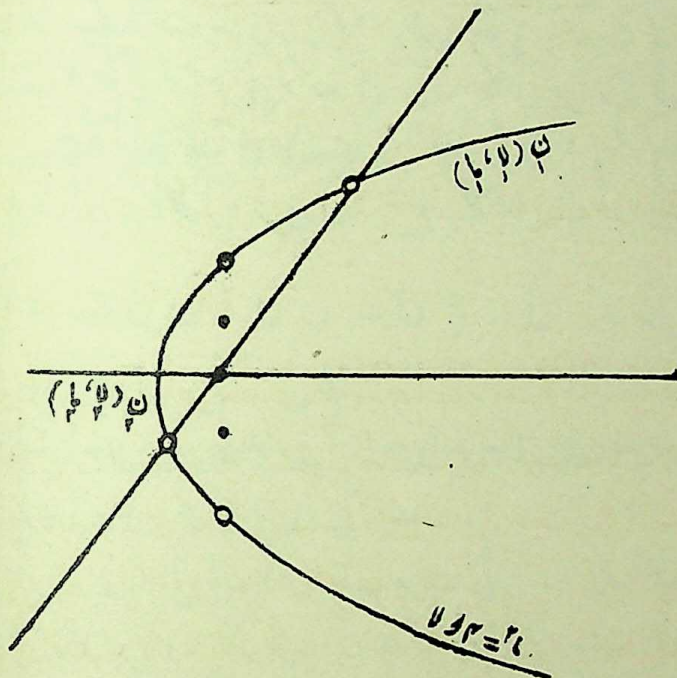
یعنی متحرک نقطہ ن سے ثابت نقطہ س کا فاصلہ ثابت خط م مَ سے نقطہ ن
کے عمودی فاصلہ ن ع کے مساوی ہے۔
اس لیے مکافی کی ماسکہ مرتب تعریف کی رُو سے متحرک نقطہ ن کا طریق
ایک مکافی ہوگا جس کا ماسکہ س ہے اور مرتب م مَ ہے۔

سوال :۔ ایک دائرہ ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے اور ایک
ثابت خط کو مس کرتا ہے۔ دائرہ کے مرکز کا طریق معلوم کرو۔

۵۴۔ مکافی کی مساوات $ما^۲ = ۴ ولا$ ہے، (ا) اس پر کے
دو نقطوں (لا، ما) (لا، ما) کے ملانے والے وتر کی مساوات دریافت
کرو (ب) اس پر کے نقطہ (لا، ما) پر مماس کی مساوات دریافت کرو۔
(ج) اس پر کے نقطہ (لا، ما) پر عماد کی مساوات دریافت
کرو۔ محور علی القوائم ہیں۔
(ا) مستوی میں کے کسی دو نقطوں ن (لا، ما) اور ن (لا، ما)

کے ملانے والے خط کی مساوات (ابھی تک یہ ضروری نہیں کہ وہ مکافی پر واقع ہیں)

$$\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{لا}_1 - \text{لا}_2} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{ما}_1 - \text{ما}_2}$$

$$\therefore\ \text{ما} - \text{ما}_1 = \frac{\text{ما}_1 - \text{ما}_2}{\text{لا}_1 - \text{لا}_2}\left(\text{لا} - \text{لا}_1\right)$$

محور قائم ہوں تو خط کا ڈھال $\frac{\text{ما}_1 - \text{ما}_2}{\text{لا}_1 - \text{لا}_2}$ ہے۔ اب اگر نقطے ن_1، ن_2 مکافی پر واقع ہوں تو

$$\text{ما}_1^2 = ۴\,\text{ا}\,\text{لا}_1،\quad \text{ما}_2^2 = ۴\,\text{ا}\,\text{لا}_2 \quad \text{یعنی} \quad \text{ما}_1^2 - \text{ما}_2^2 = ۴\,\text{ا}\left(\text{لا}_1 - \text{لا}_2\right)$$

$$\text{یعنی}\quad \frac{\text{ما}_1 - \text{ما}_2}{\text{لا}_1 - \text{لا}_2} = \frac{۴\,\text{ا}}{\text{ما}_1 + \text{ما}_2}$$

پس خط کی مساوات میں ڈھال کی یہ قیمت درج کرنے سے، مکافی کے وتر کی یہ مساوات حاصل ہوتی ہے $\text{ما} - \text{ما}_1 = \frac{۴\,\text{ا}}{\text{ما}_1 + \text{ما}_2}\left(\text{لا} - \text{لا}_1\right)$

(ب) نقطہ $(\text{لا}_1،\ \text{ما}_1)$ پر کے مماس کی مساوات حاصل کرنے کے لیے ہمیں وتر کی مساوات کی انتہائی شکل معلوم کرنا ہے جبکہ نقطہ $(\text{لا}_2،\ \text{ما}_2)$ مکافی پر حرکت کر کے نقطہ $(\text{لا}_1،\ \text{ما}_1)$ کے بے حد قریب آجائے۔ اس لیے مطلوبہ مماس کی مساوات ہوگی

$$\frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{لا} - \text{لا}_1} = \text{نہا}_{\text{ما}_2 \to \text{ما}_1} \left(\frac{۴\text{و}}{\text{ما}_1 + \text{ما}_2} \right) = \frac{۴\text{و}}{۲\text{ما}_1} = \frac{۲\text{و}}{\text{ما}_1}$$

یعنی $\text{ما}\,\text{ما}_1 - \text{ما}_1^2 = ۲\text{و}\,\text{لا} - ۲\text{و}\,\text{لا}_1$

یعنی $\text{ما}\,\text{ما}_1 - ۲\text{و}\,\text{لا} = \text{ما}_1^2 - ۲\text{و}\,\text{لا}_1 = ۲\text{و}\,\text{لا}_1$ کیونکہ $(\text{لا}_1،\ \text{ما}_1)$ مکافی $\text{ما}^2 = ۴\text{و}\,\text{لا}$ پر کا نقطہ ہے۔

یعنی $\text{ما}\,\text{ما}_1 = ۲\text{و}\,(\text{لا} + \text{لا}_1)$

نوٹ:۔ مماس کی اس مساوات سے معلوم ہوتا ہے کہ نقطہ $(\text{لا}_1،\ \text{ما}_1)$ پر کے مماس کی مساوات حاصل کرنے کے لیے ہمیں مکافی کی مساوات میں ما^2 کی بجائے $\text{ما}\,\text{ما}_1$ اور ۲لا کی بجائے $(\text{لا} + \text{لا}_1)$ درج کرنا چاہیے۔ اسی کے مماثل قاعدے ناقص اور زائد کی صورت میں بھی درست پائے جائینگے۔

(ج) نقطہ $(\text{لا}_1،\ \text{ما}_1)$ پر کے مماس کا ڈھال ہے $\frac{۲\text{و}}{\text{ما}_1}$

چونکہ مطلوبہ عماد نقطہ $(\text{لا}_1،\ \text{ما}_1)$ پر کے مماس پر عمود وار ہے اس لیے عماد کا ڈھال $= \frac{-\text{ما}_1}{۲\text{و}}$ اس لیے $(\text{لا}_1،\ \text{ما}_1)$ پر کے عماد کی مساوات ہے۔

$$\frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{لا} - \text{لا}_1} = - \frac{\text{ما}_1}{۲\text{و}}$$

یعنی $\text{ما}_1\,(\text{لا} - \text{لا}_1) + ۲\text{و}\,(\text{ما} - \text{ما}_1) = ۰$

مثال (۱) مکافی $\text{ما}^2 = ۸\,\text{لا}$ کے نقطہ ن (۲، ۴) پر کے مماس کی مساوات حاصل کرو۔

اولاً ہم دیے ہوئے نقطہ ن (۲، ۴) کے محدّد مکافی کی مساوات میں درج کر کے تصدیق کرتے ہیں کہ نقطہ ن (۲، ۴) مکافی $\text{ما}^2 = ۸\,\text{لا}$ پر ہے

کیونکہ $(\text{۴})^{2} = \text{۸}\,(\text{۲})$

فرض کرو کہ نَ (لاَ، مَا) مکافی پر کا ایک اور نقطہ ہے۔

تب $\text{مَا}^{2} = \text{۸ لاَ}$

نیز $(\text{۴})^{2} = \text{۸}\,(\text{۲})$

$\therefore \text{مَا}^{2} - (\text{۴})^{2} = \text{۸}\,(\text{لاَ} - \text{۲})$

یعنی $(\text{مَا} - \text{۴})(\text{مَا} + \text{۴}) = \text{۸}\,(\text{لاَ} - \text{۲})$

یعنی $\dfrac{\text{مَا} - \text{۴}}{\text{لاَ} - \text{۲}} = \dfrac{\text{۸}}{\text{مَا} + \text{۴}}$ . . . . (۱)

نقاط ن (۲، ۴) اور نَ (لاَ، مَا) میں سے گزرنے والے خط کا ڈھال

$= \dfrac{\text{مَا} - \text{۴}}{\text{لاَ} - \text{۲}} = \dfrac{\text{۸}}{\text{مَا} + \text{۴}}$ بموجب (۱)

اس لیے نقاط ن (۲، ۴) اور نَ (لاَ، مَا) میں سے گزرنے والے وتر کی مساوات ہوگی

$\dfrac{\text{ما} - \text{۴}}{\text{لا} - \text{۲}} = \dfrac{\text{۸}}{\text{مَا} + \text{۴}}$ . . . . (۲)

اب وتر کی مساوات (۲) کی انتہائی شکل جبکہ نَ (لاَ، مَا) مکافی پر حرکت کرکے نقطہ ن (۲، ۴) کے بے حد قریب آجاتا ہے اور بالآخر ن (۲، ۴) پر منطبق ہوتا ہے مکافی کے نقطہ ن (۲، ۴) پر کے مماس کی مساوات ہوتی ہے۔

اس لیے مکافی $\text{ما}^{2} = \text{۸ لا}$ کے نقطہ ن (۲، ۴) پر کے مماس کی مساوات ہے

$$\dfrac{\text{ما} - \text{۴}}{\text{لا} - \text{۲}} = \underset{\text{مَا} \to \text{۴}}{\text{نہا}} \dfrac{\text{۸}}{\text{مَا} + \text{۴}} = \dfrac{\text{۸}}{\text{۴} + \text{۴}} = \text{۱}$$

یعنی $\text{ما} - \text{۴} = \text{لا} - \text{۲}$

یعنی لا ـ ما + ۲ = ۰

نوٹ:۔ اگر ہم مماس کی مساوات لکھنے کے لیے دفعہ گذشتہ کے نتیجہ (ب) کو استعمال کریں تو مساوات حسب ذیل ہوگی ما(۴) = ۴ (لا+۲)

یعنی ما = لا + ۲

یعنی لا ـ ما + ۲ = ۰

یہ وہی مساوات ہے جو اُوپر کی مثال میں ہم نے ابتدائی اصول سے حاصل کی ہے۔

مشقی سوالات ۱۵

(۱) مکافی ما۲ = ـ۱۲ لا کے نقطہ (ـ۳، ٦) پر کے مماس کی مساوات ابتدائی اصول سے حاصل کرو۔

[جواب لا + ما ـ ۳ = ۰]

(۲) مکافی لا۲ + ۴ ما = ۰ کے نقطہ (۲، ـ۱) پر کے مماس کی مساوات حاصل کرو۔

[جواب لا + ما ـ ۱ = ۰]

مثال ۲۔ مکافی ما۲ ـ ۴لا ـ ۲ ما + ۹ = ۰ کے نقطہ ن (٦، ۵) پر کے مماس اور عماد کی مساواتیں حاصل کرو۔ عددی مثالوں میں سب سے پہلے ہمیں اس بات کی تصدیق کرنا چاہیے کہ دیا ہوا نقطہ دی ہوئی ترسیم پر ہے یا نہیں۔

اس مثال میں (۵)۲ ـ ۴(٦) ـ ۲(۵) + ۹ = ۲۵ ـ ۲۴ ـ ۱۰ + ۹ = ۳۴ ـ ۳۴ = ۰

اس لیے دیا ہوا نقطہ (٦، ۵) دیے ہوئے مکافی پر ہے۔

(یہ جانچ اس لیے ضروری ہے کہ اگر دیا ہوا نقطہ دیے ہوئے مکافی پر نہ ہو تو اس نقطہ پر کے مماس کے کوئی معنی نہیں ہوتے)۔

فرض کرو کہ ن (۶، ۵) کے قریب مکافی پر کا ایک اور نقطہ نَ (لاَ، ماَ) ہے۔
چونکہ نقاط ن (۶، ۵) اور نَ (لاَ، ماَ) مکافی $\text{ما}^{۲} - ۴\,\text{لا} - ۲\,\text{ما} + ۹ = ۰$ پر ہیں

اس لیے $(۵)^{۲} - ۴\,(۶) - ۲\,(۵) + ۹ = ۰$ ...... (۱)

$\text{ماَ}^{۲} - ۴\,\text{لاَ} - ۲\,\text{ماَ} + ۹ = ۰$ ...... (۲)

اس لیے تفریق سے حاصل ہوتا ہے:

$$\left[\text{ماَ}^{۲} - (۵)^{۲}\right] - ۴\,(\text{لاَ} - ۶) - ۲\,(\text{ماَ} - ۵) = ۰$$

یعنی $(\text{ماَ} - ۵)\,(\text{ماَ} + ۵ - ۲) = ۴\,(\text{لاَ} - ۶)$

یعنی $\dfrac{\text{ماَ} - ۵}{\text{لاَ} - ۶} = \dfrac{۴}{\text{ماَ} + ۳}$ ...... (۳)

اب نقاط ن (۶، ۵) اور نَ (لاَ، ماَ) میں سے گذرنے والے وتر کی مساوات ہے:

$$\frac{\text{ما} - ۵}{\text{لا} - ۶} = \frac{\text{ماَ} - ۵}{\text{لاَ} - ۶}$$

بموجب رشتہ (۳) اِس وتر کی مساوات ہو جاتی ہے:

$\dfrac{\text{ما} - ۵}{\text{لا} - ۶} = \dfrac{۴}{\text{ماَ} + ۳}$ ...... (۴)

اب نقطہ ن (۶، ۵) پر کے مماس کی مساوات حاصل کرنے کے لیے ہمیں وتر ن نَ کی مساوات (۴) کی انتہائی شکل معلوم کرنا ہے جبکہ نَ (لاَ، ماَ) مکافی پر حرکت کر کے ن (۶، ۵) کے بے حد قریب آ جائے اور بالآخر نقطۂ ن پر منطبق ہو جائے۔

اس لیے مکافی کے نقطۂ ن (۶، ۵) پر کے مماس کی مساوات ہوگی

$$\frac{\text{ما} - ۵}{\text{لا} - ۶} = \text{نہا}_{\text{ماَ} \to ۵} \frac{۴}{\text{ماَ} + ۳} = \frac{۴}{۵ + ۳} = \frac{۱}{۲}$$

یعنی $۲\,\text{ما} - ۱۰ = \text{لا} - ۶$

یعنی لا ـ ۲ ما + ۴ = ۰

پس معلوم ہوا کہ مکافی ما² ـ ۴ لا ـ ۲ ما + ۹ = ۰ کے نقطہ ن (۶، ۵) پر کے مماس کی مساوات لا ـ ۲ ما + ۴ = ۰ ہے۔

مماس کی اس مساوات سے معلوم ہوتا ہے کہ مکافی کے نقطہ ن (۶، ۵) پر کے مماس کا میلان = ½

اس لیے اسی نقطہ پر کے عماد کا میلان = ـ۲

اس لیے مکافی کے نقطہ (۶، ۵) پر کے عماد کی مساوات حسبِ ذیل ہوگی۔

(ما ـ ۵) / (لا ـ ۶) = ـ۲

یعنی ما ـ ۵ = ـ ۲ لا + ۱۲

یعنی ۲ لا + ما ـ ۱۷ = ۰

مشقی سوالات ۱۶

(۱) مکافی ما² = ۴ لا کے نقطہ (۹، ۶) پر کے عماد کی مساوات حاصل کرو اور اس عماد اور حوالہ کے محدّدوں سے بننے والے مثلث کا رقبہ معلوم کرو۔

[جواب۔ عماد کی مساوات ہے ۳ لا + ما ـ ۳۳ = ۰

مثلث کا رقبہ ہے (۱۸۱½) مربع اکائی۔

(۲) مکافی ما² = ۱۶ لا کے وترِ خاص کے سروں کے محدّد معلوم کرو۔ نیز وترِ خاص کے سروں پر کے مماسات اور عمادوں کی مساواتیں معلوم کرو۔ نیز ان چار خطوط سے بننے والے مربع کا رقبہ معلوم کرو۔

[جواب۔ نقاط (۴، ۸)، (۴، ـ۸) وترِ خاص کے سرے ہیں۔ ان نقطوں پر کے مماسات ہیں لا ـ ما + ۴ = ۰ اور لا + ما + ۴ = ۰ اور عماد ہیں لا + ما ـ ۱۲ = ۰ اور لا ـ ما ـ ۱۲ = ۰۔ مربع کا رقبہ ۱۲۸ مربع اکائی ہے۔

(۳) مکافی ما^{۲} ـ ۲لا + ۴ما + ۲ = ۰ کے نقطہ (۷، ۲) پر کے مماس اور عماد کی مساواتیں معلوم کرو۔

جواب
لا ـ ۴ما + ۱ = ۰
۴لا + ما ـ ۳۰ = ۰

(۴) مکافی لا^{۲} ـ ۴لا ـ ۴ما = ۰ کو ہر تسیم کرو۔ مکافی کے نقطہ (۶، ۳) پر کے مماس اور عماد کی مساواتیں معلوم کرو۔ نیز اس نقطہ پر کے مماس، عماد اور مکافی کے محور سے بننے والے مثلث کا رقبہ معلوم کرو۔

جواب
۲لا ـ ما ـ ۹ = ۰
لا + ۲ما ـ ۱۲ = ۰
△ کا رقبہ = ۲۰ مربع اکائی

(۵) مکافی ما^{۲} = ۸لا کے نقطہ ن (۲، ۴) پر کا عماد مکافی کے محور سے گ پر ملتا ہے اور ن سے محور پر عمود ن ع نکالا گیا ہے۔ تصدیق کرو کہ ع گ کا طول مکافی کے نیم وترِ خاص کے مساوی ہے۔

(۶) تصدیق کرو کہ مکافی ما^{۲} = ۴لا کے وترِ خاص کے سروں پر کے مماسات ایک دوسرے کو زاویۂ قائمہ پر مکافی کے محور اور مرتب کے نقطۂ تقاطع پر قطع کرتے ہیں۔

(۷) مکافی ما^{۲} = ۴الا کے نقطہ ن (ات^{۲}، ۲ات) پر کا مماس اور عماد مکافی کے محور سے بالترتیب ت اور گ پر ملتے ہیں اور ن سے محور پر عمود ن ع نکالا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ زیر مماس یعنی ت ع کا وسطی نقطہ مکافی کے راس ا پر ہے اور زیر عماد یعنی ع گ کا طول مکافی کے نیم وترِ خاص کے مساوی ہے۔

[نوٹ۔ اولاً تصدیق کرو کہ ت کی ہر قیمت کے لیے نقطہ ن (ات^{۲}، ۲ات) مکافی ما^{۲} = ۴الا پر واقع ہوتا ہے]۔

۶،۴ ـ مکافی ما^{۲} = ۴الا اور خطِ مستقیم ما = م لا + ج کے نقاطِ تقاطع کے محدد معلوم کرو۔

دیے ہوئے مکافی اور دیے ہوئے خطِ مستقیم کا مشترک نقطہ یا نقطے معلوم کرنے کے لیے ہم مکافی اور خطِ مستقیم کی مساواتوں کو بطور ہمزاد مساواتوں کی طرح حل کرتے ہیں۔ اس غرض سے ان دو مساواتوں میں سے ایک نامعلوم مقدار مثلاً ما کو ساقط کرتے ہیں۔

ما کو ساقط کرنے کے لیے مکافی کی مساوات میں ما کی بجائے (م لا + ج) درج کرو۔ حاصل ہوگا (م لا + ج)^2 = ۴ و لا

یعنی م^2 لا^2 + ۲ لا (م ج - ۲ و) + ج^2 = ۰ .... (۱)

یہ لا میں درجۂ دوم کی مساوات ہے۔ اس کی دو اصلیں ہوں گی جو (۱) حقیقی اور مختلف یا (۲) حقیقی اور منطبق یا (۳) خیالی ہو سکتی ہیں۔ اور یہ اصلیں مکافی ما^2 = ۴ و لا اور خطِ مستقیم ما = م لا + ج کے نقاطِ تقاطع کے فصلوں کو تعبیر کرتی ہیں۔

فرض کرو کہ لا میں درجۂ دوم کی مساوات (۱) کی اصلیں لا$_1$ اور لا$_2$ ہیں۔ یعنی مکافی اور خطِ مستقیم کے نقاطِ تقاطع کے فصلے لا$_1$ اور لا$_2$ ہیں۔ ان کے جواب میں معینوں کی قیمتیں معلوم کرنے کے لیے ہم خطِ مستقیم کی مساوات ما = م لا + ج میں لا کی بجائے علی الترتیب لا$_1$ اور لا$_2$ درج کرتے ہیں اور اس طرح سے ترتیب وار نقاطِ تقاطع کے معین ما$_1$ اور ما$_2$ حاصل کرتے ہیں۔

لا$_1$ کے جواب میں حاصل ہوتا ہے ما$_1$ = م لا$_1$ + ج

اور لا$_2$ کے جواب میں حاصل ہوتا ہے ما$_2$ = م لا$_2$ + ج

اس طرح سے معلوم ہوتا ہے کہ مکافی ما^2 = ۴ و لا اور خطِ مستقیم ما = م لا + ج کے نقاطِ تقاطع ($\overline{\text{لا}_1\text{، م لا}_1 + \text{ج}}$) اور ($\overline{\text{لا}_2\text{، م لا}_2 + \text{ج}}$) ہیں جہاں لا$_1$ اور لا$_2$ درجۂ دوم کی مساوات (۱) کی اصلیں ہیں۔

مثال :- مکافی ما^2 = ۲۴ لا اور خطِ مستقیم ما = ۲ لا + ۶ کے نقاطِ تقاطع معلوم کرو۔

مکافی اور خطِ مستقیم کے نقاطِ تقاطع کے فصلے معلوم کرنے کے لیے دی ہوئی دو مساواتوں میں سے ما کو ساقط کر کے لا میں ایک مساوات

حاصل کرو۔

اس غرض سے مکانی کی مساوات میں ما کی بجائے ۲ لا + ۶ درج کرو۔

حاصل ہوگا (۲ لا + ۶)^{۲} = ۶۴ لا

یعنی ۴ لا^{۲} − ۴۰ لا + ۳۶ = ۰

یعنی لا^{۲} − ۱۰ لا + ۹ = ۰

یعنی (لا − ۱) (لا − ۹) = ۰

اس مساوات کی اصلیں ہیں ۱ اور ۹

پس معلوم ہوا کہ مکانی اور خطِ مستقیم کے نقاطِ تقاطع کے فصلے ۱ اور ۹ ہیں۔ فصلوں کی ان قیمتوں کے جواب میں نقاطِ تقاطع کے معینوں کی قیمتیں معلوم کرنے کے لیے ہم خطِ مستقیم کی مساوات میں لا کی بجائے ترتیب وار ۱ اور ۹ درج کرتے ہیں۔ ما کی تناظر قیمتیں ہیں ۸ اور ۲۴

پس معلوم ہوا کہ مکانی ما^{۲} = ۶۴ لا اور خطِ مستقیم ما = ۲ لا + ۶ کے نقاطِ تقاطع (۱، ۸) اور (۹، ۲۴) ہیں۔

مشقی سوالات ۱۷

(۱) مکانی ما^{۲} = ۴ لا اور خطِ مستقیم ۲ ما = لا + ۴ کے نقاطِ تقاطع کے محدّد معلوم کرو۔

[جواب (۴، ۴) پر دو منطبق نقطے]

(۲) بتاؤ کہ خطِ مستقیم ما = ۲ لا + ۱ مکانی ما^{۲} = ۸ لا کو مس کرتا ہے یعنی دو منطبق نقطوں پر قطع کرتا ہے۔

[جواب نقطہ تماس ($\frac{۱}{۲}$، ۲) ہے]

(۳) ثابت کرو کہ خطِ مستقیم ما = لا + ۹ مکانی ما^{۲} = ۱۶ لا کو دو خیالی نقطوں

پر قطع کرتا ہے ۔

(۴) مکافی ما^{۲} = ۲ لا + ۱ اور خطِ مستقیم لا ـ ۲ ما + ۲ = ۰ کے نقاطِ تقاطع کے محدّد معلوم کرو ۔

اشارہ :۔ دیے ہوئے خط کی مساوات کو شکل ما = $\frac{\text{لا} + ۲}{۲}$ میں لکھو اور مکافی کی مساوات میں ما کی بجائے $\frac{\text{لا} + ۲}{۲}$ درج کرو ۔

[جواب (۴،۳) اور (۰،۱)]

(۵) مکافی لا^{۲} ـ ۴ لا ـ ۴ ما = ۰ اور خطِ مستقیم ما = لا ـ ۳ کے نقاطِ تقاطع کے محدّد معلوم کرو ۔

اشارہ :۔ خط کی مساوات شکل لا = ما + ۳ میں لکھو اور مکافی کی مساوات میں لا کی بجائے ما + ۳ درج کرو ۔ اس طرح سے ما میں درجۂ دوم کی ایک مساوات حاصل ہوگی جس کی اصلیں دیے ہوئے مکافی اور خطِ مستقیم کے نقاطِ تقاطع کے معینوں کو تعبیر کرینگی ۔ نقاطِ تقاطع کے معینوں کی اِن قیمتوں کے جواب میں خطِ مستقیم کی مساوات کی مدد سے نقاطِ تقاطع کے فصلوں کی قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں ۔

[جواب (۲،ـ۱) (۶،۳)]

(۶) ثابت کرو کہ خطِ مستقیم ۲ لا ـ ما = ۰ مکافی ما^{۲} ـ ۴ لا ـ ۲ ما + ۴ = ۰ کو مس کرتا ہے ۔ نیز نقطۂ تماس کے محدّد معلوم کرو ۔

[جواب (۱،۲)]

۶۱ د ۴ ـ تماس کی شرط ـ

خطِ مستقیم ما = م لا + ج مکافی ما^{۲} = ۴ ا لا کو مس کریگا اگر اس خط اور مکافی کے نقاطِ تقاطع منطبق ہوں ۔ اس صورت میں دفعہ ۶ د ۴ کی مساوات (۱) یعنی م^{۲} لا^{۲} + ۲ لا (م ج ـ ۲ ا) + ج^{۲} = ۰ کی اصلیں مساوی ہونگی ۔ اس درجۂ دوم کی مساوات کی اصلیں مساوی ہونگی

اگر (م ج ـ ۲ ا)^{۲} = م^{۲} ج^{۲}

یعنی اگر ۴ $ا^{۲}$ − ۴ ا م ج = ۰

یعنی اگر ج = $\frac{ا}{م}$

پس معلوم ہوا کہ خطِ مستقیم ما = م لا + ج مکافی $ما^{۲}$ = ۴ ا لا کو مس کریگا اگر ج = $\frac{ا}{م}$

یعنی م کی ہر قیمت کے لیے خطِ مستقیم ما = م لا + $\frac{ا}{ج}$ مکافی $ما^{۲}$ = ۴ ا لا کو مس کریگا۔ نقطۂ تماس کے محدّد معلوم کرنے کے لیے ہم مکافی $ما^{۲}$ = ۴ ا لا اور خط ما = م لا + $\frac{ا}{ج}$ کو ہمزاد مساواتوں کی طرح حل کر کے اِن کے نقاطِ تقاطع (جو ایک دوسرے پر منطبق ہیں) کے محدد معلوم کرتے ہیں۔

مکافی کی مساوات $ما^{۲}$ = ۴ ا لا اور مماس کی مساوات ما = م لا + $\frac{ا}{م}$ میں سے ما کو ساقط کرنے سے لا میں ذیل کی درجۂ دوم کی مساوات حاصل ہوتی ہے:

(م لا + $\frac{ا}{م}$$)^{۲}$ = ۴ ا لا

یعنی $م^{۲}$ $لا^{۲}$ + ۲ ا لا − ۴ ا لا + $\frac{ا^{۲}}{م^{۲}}$ = ۰

یعنی $م^{۲}$ $لا^{۲}$ − ۲ ا لا + $\frac{ا^{۲}}{م^{۲}}$ = ۰

یعنی (م لا − $\frac{ا}{م}$$)^{۲}$ = ۰

اس مساوات کی دونوں اصلیں مساوی ہیں اور ہر ایک اصل کی قیمت $\frac{ا}{م^{۲}}$ ہے۔

پس معلوم ہوا کہ خط ما = م لا + $\frac{ا}{م}$ مکافی $ما^{۲}$ = ۴ ا لا کو جس نقطہ پر مس کرتا ہے اس کا فصلہ $\frac{ا}{م^{۲}}$ ہے۔ نقطۂ تماس کا معین معلوم کرنے کے لیے مماس کی مساوات میں لا کی بجائے $\frac{ا}{م^{۲}}$ درج کرو۔ حاصل ہوگا ما = $\frac{ا}{م}$ + $\frac{ا}{م}$ = $\frac{۲ا}{م}$

پس معلوم ہوا کہ خط ما = م لا + $\frac{ا}{م}$ مکافی $ما^{۲}$ = ۴ ا لا کو مس کرتا ہے اور نقطۂ تماس کے محدد ($\frac{ا}{م^{۲}}$ ، $\frac{۲ا}{م}$) ہیں۔

پس معلوم ہوا کہ م کی ہر قیمت کے لیے خطِ مستقیم ما = م لا + ا/م مکافی ما² = ۴ ا لا کو نقطہ (ا/م² ، ۲ا/م) پر مس کرتا ہے۔

۴،۶۲ - مکافی کی متبدلی تعبیر

مکافی کے مماس ما = م لا + ا/م کا میلان م ہے اور مماس کے میلان م کی رقوم میں مماس کے نقطۂ تماس کے محدد، شکل (ا/م² ، ۲ا/م) میں حاصل ہوتے ہیں۔

اگر ہم ۱/م = ت لکھیں تو نقطۂ تماس کے محدد ہوں گے

(ات² ، ۲ات) اور مماس کا میلان م = ۱/ت

چونکہ ت کی ہر قیمت کے لیے نقطہ (ات² ، ۲ات) مکافی ما² = ۴ ا لا پر واقع ہوتا ہے اس لیے لا = ات² ، ما = ۲ات مکافی ما² = ۴ ا لا کی متبدلی تعبیر ہے۔ اس میں ت متبدل ہے اور متبدل ت کی قیمت اور نقطہ زیرِ بحث پر کے مماس کے میلان م میں ذیل کا رشتہ درست ہے

م = ۱/ت

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر مکافی ما² = ۴ ا لا پر کے کسی نقطہ کے محدد ایک متبدل کی رقوم میں معلوم ہوں تو متبدل کی رقوم میں اس نقطہ پر کے مماس کا میلان معلوم ہو سکتا ہے اور مماس کی مساوات بھی فوراً لکھی جا سکتی ہے۔

۴،۷ - عماد کی مساوات - مکافی ما² = ۴ ا لا

کے نقطہ (ن) (ات² ، ۲ات) پر کے مماس کا میلان = ۱/ت

اس لیے اس نقطہ پر کے عماد کا میلان = −ت

اس لیے نقطہ (ات² ، ۲ات) پر کا عماد وہ خطِ مستقیم ہے جو

نقطہ (ا ت^۲ ، ۲ ا ت) میں سے گزرتا ہے اور جس کا میلان = − ت
اس لیے نقطہ (ا ت^۲ ، ۲ ا ت) پر کے عماد کی مساوات ہوگی
(ما − ۲ ا ت) = − ت (لا − ا ت^۲)
یعنی ما + ت لا = ۲ ا ت + ا ت^۳ .... (۱)

مشق: ۔ مکافی ما^۲ = ۸ لا کے نقطہ (۲ ، ۴) پر کے عماد کی مساوات اوپر کے ضابطہ کی مدد سے لکھو۔

مکافی کی دی ہوئی مساوات کا مقابلہ معیاری مساوات ما^۲ = ۴ ا لا سے کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ ا = ۲

اگر دیے ہوئے نقطہ (۲ ، ۴) پر متبدل کی قیمت ت ہو تو نقطہ کے محدد ہونگے (ا ت^۲ ، ۲ ا ت) یعنی (۲ ت^۲ ، ۴ ت)

لیکن دیے ہوئے نقطہ کے محدّد (۲ ، ۴) ہیں۔

اس لیے ۲ ت^۲ = ۲

اور ۴ ت = ۴

اس سے حاصل ہوتا ہے کہ ت = ۱

اس لیے عماد کی مندرجۂ بالا مساوات (۱) کی مدد سے دیے ہوئے مکافی کے نقطہ (۲ ، ۴) پر کے عماد کی مساوات ذیل کی شکل میں حاصل ہوتی ہے

ما + (۱) لا = ۲ × ۲ × ۱ + ۲ (۱)^۳

یعنی لا + ما = ۶

نوٹ ۔ عماد کی یہ مساوات دفعہ ۴۰۵ (ج) کے طریقہ سے بھی حاصل ہوسکتی ہے۔

۴۰۸ ۔ منحنی اور خطِ مستقیم کے نقاطِ تقاطع اور تماس کی شرط

تماس کی شرط ۔ اگر کسی منحنی اور خطِ مستقیم کی مساواتیں دی گئی ہوں تو منحنی اور خطِ مستقیم کے نقاطِ تقاطع کے محدّد معلوم کرنے کے لیے ہم منحنی اور خطِ مستقیم کی مساواتوں کو ہمزاد مساواتوں کی طرح حل کرسکتے ہیں۔

اگر منحنی کی مساوات درجۂ دوم کی ہو تو منحنی اور خطِ مستقیم کے دو نقاطِ تقاطع ہونگے جو (۱) حقیقی اور مختلف یا (۲) حقیقی اور منطبق یا (۳) خیالی ہو سکتے ہیں۔

اگر یہ دونوں نقاطِ تقاطع منطبق ہوں تو دیا ہوا خطِ مستقیم دیے ہوئے منحنی کو مس کرتا ہے یعنی خطِ مستقیم منحنی کا مماس ہے۔

مندرجۂ بالا اصول کو استعمال کرکے ہم معلوم کر سکتے ہیں کہ کس شرط کے پورا ہونے پر ایک دیا ہوا خط ایک دیے ہوئے منحنی کو مس کرتا ہے یعنی تماس کی شرط معلوم کر سکتے ہیں۔

مثلاً دفعہ ۷، ۴ میں یہ ثابت کیا گیا کہ خطِ مستقیم $ما = م لا + ج$ مکافی $ما^{۲} = ۴ ا لا$ کو مس کریگا اگر $ج = \frac{ا}{م}$

یعنی مکافی $ما^{۲} = ۴ ا لا$ اور خطِ مستقیم $ما = م لا + ج$ کے تماس کی شرط $ج = \frac{ا}{م}$ ہے۔

مثال:- معلوم کرو کہ ج کی کس قیمت کے لیے خطِ مستقیم $لا - ۲ ما + ج = ۰$ مکافی $ما^{۲} - ۴ لا - ۲ ما + ۹ = ۰$ کو مس کرتا ہے۔
نیز ج کی اس قیمت کے لیے نقطۂ تماس کے محدّد معلوم کرو۔

دیے ہوئے خط کی مساوات ذیل کی شکل میں لکھی جا سکتی ہے:

$$ما = \frac{لا + ج}{۲}$$

اس لیے مکافی اور خطِ مستقیم کے نقاطِ تقاطع کے فصلے ذیل کی مساوات کی اصلیں ہیں:-

$$\left(\frac{لا + ج}{۲}\right)^{۲} - ۴ لا - (لا + ج) + ۹ = ۰$$

یعنی $(لا + ج)^{۲} - ۱۶ لا - ۴(لا + ج) + ۳۶ = ۰$

یعنی $لا^{۲} + ۲ لا (ج - ۱۰) + (۳۶ - ۴ ج + ج^{۲}) = ۰$ ...... (۱)

دیا ہوا خطِ مستقیم مکافی کو مس کریگا اگر اس مساوات کی اصلیں مساوی ہوں۔

یعنی اگر (ج ـ ۱۰)^۲ = (۳۶ ـ ۴ ج + ج^۲)

یعنی اگر ۱۶ ج = ۶۴

یعنی اگر ج = ۴

پس معلوم ہوا کہ خطِ مستقیم لا ـ ۲ ما + ۴ = ۰ مکافی ما^۲ ـ ۴ لا ـ ۲ ما + ۹ = ۰ کو مس کرتا ہے۔

اگر ج = ۴ تو مساوات (۱) ہو جاتی ہے۔

لا^۲ ـ ۱۲ لا + ۳۶ = ۰

یعنی لا = ۶ یعنی نقطۂ تماس کا فصلہ ۶ ہے۔

فصلہ کی اس قیمت کو تماس کی مساوات لا ـ ۲ ما + ۴ = ۰ میں درج کرنے سے نقطۂ تماس کے معیّن کی قیمت ۵ حاصل ہوتی ہے۔

پس معلوم ہوا کہ اگر تماس کی شرط پوری ہو تو نقطۂ تماس کے محدّد (۶، ۵) ہیں۔

مشقی سوالات ۱۸

(۱) کس شرط کے پورا ہونے پر خطِ مستقیم ما = م لا + ج مکافی لا^۲ = ۴ ب ما کو مس کریگا؟

[جواب ـ ب م^۲ + ج = ۰]

(۲) اس کے لیے شرط معلوم کرو کہ خط لا جم عہ + ما جم عہ = ع مکافی ما^۲ = ۴ ا لا کو مس کرے۔

[جواب ـ ع جم عہ + ا جب^۲ عہ = ۰]

(۳) اس کے لیے شرط معلوم کرو کہ خطِ مستقیم ل لا + م ما + ن = ۰
مکافی ما² = ۴ ؤ لا کو مس کرے۔

[جواب ؤ م² = ن ل]

(۴) کس شرط کے پورا ہونے پر خطِ مستقیم ما = م لا + لہ
مکافی ما² + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ کو مس کریگا؟

[جواب (م لہ + گ + م ف)² = م² (لہ² + ۲ ف لہ + ج)]

(۵) مکافی ما² = ۸ لا کے اُس مماس کی مساوات معلوم کرو جو لا ــ محور کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بناتا ہے۔

[جواب ما = لا + ۲]

(۶) مکافی ما² ــ ۲ لا + ۴ ما + ۱ = ۰ کے اُس مماس کی مساوات حاصل کرو جو خطِ مستقیم لا ــ ۳ ما + ۴ = ۰ کے متوازی ہے۔

[جواب لا ــ ۳ ما = ۰]

(۷) مکافی ما² ــ ۴ لا ــ ۲ ما + ۳ = ۰ کے اُس مماس کی مساوات معلوم کرو جو خطِ مستقیم لا + ۲ ما + ۴ = ۰ پر عمود وار ہے۔

[جواب ۲ لا ــ ما = ۰]

۴ء۹ ـ وترِ تماس کی مساوات۔

دفعہ ۴ء۶۱ کی رُو سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر مکافی ما² = ۴ ؤ لا کے مماس کا

میلان م دیا جائے تو مماس کی مساوات بالکل معین ہو جاتی ہے اس لیے مکافی کی صورت میں ایک ہی میلان والے دو مماس نہیں کھینچے جا سکتے ہیں۔

اس لیے اگر مکافی کے نقاطت۱ اور ت۲ پر مماس کھینچے جائیں تو یہ مماسات ایک دوسرے کو قطع کرینگے۔ فرض کرو کہ ان مماسات کا نقطۂ تقاطع ن۱ ہے۔

اس مطلب کو ہم اس طرح بھی ادا کر سکتے ہیں کہ نقطۂ ن۱ سے مکافی تک کھینچے ہوئے مماسات ن۱ت۱ اور ن۱ت۲ ہیں۔ یعنی معلوم ہوتا ہے کہ ایک نقطہ سے مکافی کے دو مماس کھینچ سکتے ہیں۔

اور نقاطِ تماس ت۱ اور ت۲ میں سے گزرنے والا خطِ مستقیم نقطہ ن۱ سے مکافی تک کھینچے ہوئے مماسات کا وترِ تماس کہلاتا ہے۔

اب ہم نقطۂ ن۱ (لا۱، ما۱) سے مکافی ما۲ = ۴ ولا تک کھینچے ہوئے مماسات کے وترِ تماس کی مساوات معلوم کرنا چاہتے ہیں۔

فرض کرو کہ نقاطِ تماس ت۱ (لاَ، ماَ) اور ت۲ (لاً، ماً) ہیں۔

ت۱ (لاَ، ماَ) پر کے مماس کی مساوات ہے۔

ما ماَ = ۲ و (لا + لاَ)

چونکہ یہ مماس نقطہ ن۱ (لا۱، ما۱) میں سے گزرتا ہے۔

اس لیے ما۱ ماَ = ۲ و (لا۱ + لاَ)

یعنی ماَ ما۱ = ۲ و (لاَ + لا۱) .... (۱)

اسی طرح سے چونکہ نقطہ ت۲ (لاً، ماً) پر کا مماس بھی نقطہ ن۱ (لا۱، ما۱) میں سے گزرتا ہے اس لیے ماً ما۱ = ۲ و (لاً + لا۱) .... (۲)

اب درجۂ اول کی مساوات

ما ما۱ = ۲ و (لا + لا۱) ....(۳)

پر غور کرو۔

چونکہ مساوات (۳) درجۂ اول کی ہے اس لیے ایک خطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

رشتہ (۱) سے معلوم ہوتا ہے کہ یہ خط (۳) نقطہ ت۱ (لاَ، ماَ) میں سے

گذرتا ہے۔ اور رشتہ (۲) سے معلوم ہوتا ہے کہ یہ خط (۳) نقطہ ت۲ (لا۲، ما۲) میں سے بھی گزرتا ہے۔ پس معلوم ہوا کہ مساوات (۳) اُس خطِ مستقیم کی مساوات ہے جو نقاطِ تماس ت۱ اور ت۲ میں سے گذرتا ہے۔

یعنی ثابت ہوا کہ نقطہ ن۱ (لا۱، ما۱) سے مکافی ما۲ = ۴ ا لا تک کھنچے ہوئے مماسات کے نقاطِ تماس میں سے گزرنے والے خط یعنی وترِ تماس کی مساوات

ما ما۱ = ۲ ا (لا + لا۱) ہے ....(۴)

نوٹ (۱) اس مساوات کی شکل بالکل وہی ہے جو نقطہ (لا۱، ما۱) پر کے مماس کے لیے لکھی جاتی ہے۔ البتہ فرق یہ ہے کہ مماس کی صورت میں ضروری ہے کہ نقطہ (لا۱، ما۱) مکافی پر واقع ہو۔ وترِ تماس کی صورت میں ایسی کوئی شرط نہیں لگائی جاتی ہے۔

نوٹ (۲) اگر نقطہ (لا۱، ما۱) مکافی کے باہر ہو تو مماسات حقیقی ہونگے۔ اس لیے نقاطِ تماس بھی حقیقی ہونگے اور ان نقاطِ تماس میں سے گزرنے والے وترِ تماس کی مساوات اوپر کی شکل (۴) سے حاصل ہوگی۔ اگر نقطہ (لا۱، ما۱) مکافی کے اوپر ہو تو دونوں مماسات نقطہ (لا۱، ما۱) پر کے مماس پر منطبق ہونگے اور وترِ تماس وہی خط ہوگا جو (لا۱، ما۱) پر کا مماس ہے۔ اگر (لا۱، ما۱) مکافی کے اندر ہو تو مماسات خیالی ہونگے اور وترِ تماس اِن خیالی نقاطِ تماس میں سے گزرنے والا خط ہوگا۔ چونکہ وترِ تماس کی مساوات حقیقی ہے۔ اس لیے معلوم ہوتا ہے کہ اِن خیالی نقاطِ تماس میں سے گزرنے والا خط حقیقی ہے۔

۱۹۴۔ قطبی اور قطب۔ دائرہ کے بیان میں دفعہ ۳۷ میں دائرے کے لحاظ سے ایک دیے ہوئے نقطے کے قطبی کی جو تعریف اختیار کی گئی اُسی کے مماثل تعریف مکافی کی صورت میں بھی اختیار کی جاتی ہے۔ یعنی مکافی کے لحاظ سے نقطہ ن۱ کا قطبی وہ خطِ مستقیم ہے جو ن۱ سے مکافی تک کھنچے ہوئے مماسات کے نقاطِ تماس میں سے گزرتا ہے۔

اس لیے مکافی ما۲ = ۴ ا لا کے لحاظ سے نقطہ ن۱ (لا۱، ما۱) کے قطبی کی مساوات ہے۔

ما ما۱ = ۲ ا (لا + لا۱)

نوٹ:۔ ن (لا_1، ما_1) کا قطبی فی الحقیقت وہی خط ہے جو دفعہ ۴،۹۱ میں وترِ تماس کے نام سے موسوم کیا گیا۔

اگر مکافی کے لحاظ سے نقطہ ن کا قطبی خطِ مستقیم ل ہو تو نقطہ ن مکافی کے لحاظ سے خطِ مستقیم ل کا قطب کہلاتا ہے۔

۴،۹۲۔ مکافی ما^2 = ۴ ا لا کے لحاظ سے خطِ مستقیم ما = م لا + ج کے قطب کے محدّد معلوم کرو۔ فرض کرو کہ مطلوبہ قطب کے محدّد (لا_1، ما_1) ہیں۔

تب مکافی ما^2 = ۴ ا لا کے لحاظ سے نقطہ (لا_1، ما_1) کے قطبی کی مساوات ہوگی

$$\text{ما}\,\text{ما}_1 = ۲\,\text{ا}\,(\text{لا} + \text{لا}_1)$$

لیکن اسی خط کی مساوات ما = م لا + ج ہے۔

چونکہ یہ دونوں خطی مساواتیں ایک ہی خط کو تعبیر کرتی ہیں اس لیے ان میں نظیر کی رقموں کے سر متناسب ہونگے۔

$$\text{یعنی}\quad \frac{\text{ما}_1}{۱} = \frac{۲\,\text{ا}}{\text{م}} = \frac{۲\,\text{ا}\,\text{لا}_1}{\text{ج}}$$

$$\text{یعنی}\quad \text{لا}_1 = \frac{\text{ج}}{\text{م}} \quad \text{اور} \quad \text{ما}_1 = \frac{۲\,\text{ا}}{\text{م}}$$

پس معلوم ہوا کہ مکافی ما^2 = ۴ ا لا کے لحاظ سے خطِ مستقیم ما = م لا + ج کا قطب نقطہ $\left(\frac{\text{ج}}{\text{م}}،\ \frac{۲\,\text{ا}}{\text{م}}\right)$ ہے۔

مثال:۔ مکافی ما^2 = ۸ لا کے لحاظ سے خطِ مستقیم لا − ما + ۱ = ۰ کے قطب کے محدّد معلوم کرو۔

فرض کرو کہ (لا_1، ما_1) مطلوبہ قطب ہے۔

تب مکافی ما^2 = ۸ لا کے لحاظ سے (لا_1، ما_1) کے قطبی کی مساوات ہوگی

$$\text{ما}\,\text{ما}_1 = ۴\,(\text{لا} + \text{لا}_1)$$

لیکن اسی خط کی مساوات لا - ما + ۱ = ۰ ہے یعنی ما = لا + ۱ ہے ؛
چونکہ یہ دونوں خطی مساواتیں ایک ہی خط کو تعبیر کرتی ہیں اس لیے
ان میں نظیر کی رقموں کے سر تناسب ہونگے ۔

اس لیے $\frac{\text{ما}_{1}}{1} = \frac{2}{1} = \frac{2\text{لا}_{1}}{1}$

یعنی لا₁ = ۱ اور ما₁ = ۲

پس مطلوبہ قطب کے محدد (۱، ۲) ہیں ۔

نوٹ ۔ مکافی کے لحاظ سے ایک دیے ہوئے خطِ مستقیم کا قطب مکافی اور دیے ہوئے خطِ مستقیم کے نقاطِ تقاطع پر کے مماسات کا نقطۂ تقاطع ہے ۔

مشقی سوالات ۱۹

(۱) مکافی ما² = ۱۲ لا کے لحاظ سے نقطہ (۱، -۳) کے قطبی کی مساوات حاصل کرو ۔

[جواب ۲ لا + ما + ۲ = ۰]

(۲) مکافی لا² = ۸ ما کے لحاظ سے نقطۂ (۱، ۵) کے قطبی کی مساوات حاصل کرو ۔

[جواب لا - ۴ ما - ۲۰ = ۰]

(۳) مکافی ما² + ۴ لا = ۰ کے لحاظ سے نقطۂ (۳، -۱) کے قطبی کی مساوات حاصل کرو ۔

[جواب ۲ لا - ما + ۶ = ۰]

(۴) ثابت کرو کہ مکافی ما² = ۴ ا لا کے لحاظ سے ماسکہ س (ا، ۰) کا قطبی مکافی کا مرتب ہے ۔

(۵) ثابت کرو کہ مکافی کے لحاظ سے مکافی کے کسی مماس کا قطب اس

مماس کا نقطۂ تماس ہوتا ہے۔

(۶) مکافی ما^2 = ۴ لا کے لحاظ سے خطِ مستقیم ما = ۲ لا + ۴ کا قطب معلوم کرو۔

[جواب (۲، ۱)]

(۷) مکافی لا^2 + ۴ ما = ۰ کے لحاظ سے خطِ مستقیم لا + ما + ۱ = ۰ کا قطب معلوم کرو۔

[جواب (۲، ۱)]

(۸) خطِ مستقیم لا + ما + ۱ = ۰ اور مکافی ما^2 + ۶ لا = ۰ کے نقاطِ تقاطع پر کے مماسات کا نقطۂ تقاطع معلوم کرو۔

[جواب (۱، ۳)]

(۹) دائرہ لا^2 + ما^2 = ۲۵ کے کسی مماس کا قطب مکافی ما^2 = ۴ لا کے لحاظ سے لیا گیا۔ قطب کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔

[جواب ۴ لا^2 − ۲۵ ما^2 = ۱۰۰]

(۱۰) مکافی ما^2 = ۲۴ لا کے لحاظ سے مکافی کے اس ماسکی وتر کا قطب معلوم کرو جو محور کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بناتا ہے۔

[جواب (−۶، ۱۲)]

مکافی پر متفرق سوالات ۲۰

(۱) مکافی کا راس مبدا پر ہے اور محورِ تشاکل لا۔ محور پر اور مرتب خط لا=۶ پر۔ مکافی کی مساوات معلوم کرو۔ نیز وترِ خاص کا طول اور وترِ خاص کے سروں کے محدّد معلوم کرو۔

[جواب ۔ مکافی کی مساوات ہے ما^2 + ۲۴ لا = ۔ وترِ خاص کے سرے (–۶، ۱۲)، (–۶، –۱۲) ہیں]

(۲) مکافی کا راس نقطہ (۳، ۴) پر ہے اور مرتب ما۔ محور کے متوازی ہے۔ نیز مکافی نقطہ (۷، ۸) میں سے گزرتا ہے۔ مکافی کی مساوات معلوم کرو۔ نیز مکافی کے وترِ خاص کا طول، ماسکہ کے محدّد اور مرتب کی مساوات حاصل کرو۔

[جواب ۔ مکافی کی مساوات ہے (ما –۴)^2 = ۴ (لا –۳) وترِ خاص کا طول = ۴ ماسکہ نقطہ (۴، ۴) ہے مرتب کی مساوات لا = ۲ ہے۔

(۳) مکافی کا راس نقطہ (۲، ۳) پر ہے، اور ماسکہ (۵، ۳) پر ہے۔ مکافی کی مساوات معلوم کرو۔

[جواب (ما –۳)^2 = ۱۲ (لا –۲)]

(۴) مکافی کا راس نقطہ (۴، ۲) پر ہے اور مرتب خطِ مستقیم لا = ۱ ہے۔ مکافی کی مساوات حاصل کرو۔

[جواب (ما –۲)^2 = ۱۲ (لا –۴)]

(۵) مکافی کا راس نقطہ (۶، ۳) پر ہے، محورِ تشاکل ما۔ محور کے متوازی ہے۔ اور مکافی نقطہ (۱۰، ۷) میں سے گزرتا ہے۔ مکافی کی مساوات معلوم کرو۔

[جواب (لا –۶)^2 = ۴ (ما –۳)]

(۶) مکافی ما^2 = ۴ لا پر دو نقاط ن۱ اور ن۲ اس طرح لیے گئے ہیں کہ اِن میں سے ہر ایک مکافی کے ماسکہ سے فاصلہ (۱۰) پر واقع ہے۔ نقاط ن۱ اور ن۲ کے

محدد معلوم کرو۔

[جواب (۹، ۶)، (۹، -۶)]

(۷) مکافی با۲ = ۸ لا کے اندر ایک مثلث مساوی الاضلاع بنایا گیا ہے جس کا ایک راس مکافی کے راس پر ہے مثلث کے دوسرے دو راسوں کے محدد اور مثلث کے ضلع کا طول معلوم کرو۔

[جواب (۲۴، ± ۸ √۳)؛ ضلع کا طول = ۱۶ √۳]

(۸) مکافی با۲ = ۱۲ لا کے کسی نقطہ ن سے مکافی کے محور پر عمود ن ع نکالا گیا ہے۔ ع ن کے وسطی نقطہ کے طریق کی مساوات حاصل کرو، اور ثابت کرو کہ یہ طریق بھی ایک مکافی ہے۔

[جواب با۲ = ۳ لا]

(۹) ثابت کرو کہ ایک دیے ہوئے خط کے متوازی مکافی کا ایک اور صرف ایک مماس کھینچ سکتا ہے۔

(۱۰) مکافی با۲ = ۴ لا کے ان مماسات کی مساواتیں علیحدہ علیحدہ معلوم کرو جو نقطہ (۲، ۳) میں سے گزرتے ہیں۔ نیز ان مماسات کا درمیانی زاویہ معلوم کرو۔

[جواب۔ مماسات ہیں با = لا + ۱ اور ۲ با = لا + ۴
اور ان مماسات کا درمیانی زاویہ = مس⁻¹ (۱/۳)]

(۱۱) مکافی کے کسی نقطہ ن پر کا مماس راس پر کے مماس سے ما پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ س ما نقطہ ن پر کے مماس پر عمود وار ہے جہاں س مکافی کا ماسکہ ہے۔

(۱۲) مکافی با۲ = ۴ لا کے نقطہ (۹، ۶) کے جواب میں زیرِ مماس اور زیرِ عماد کے طول معلوم کرو۔

[جواب۔ زیرِ مماس ۱۸، زیرِ عماد = ۲]

(۱۳) مکافی کا ماسکہ س ہے۔ مکافی کے کسی نقطہ ن پر کا مماس مکافی کے محور سے ت پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ س ن = س ت۔

(۱۴) نور کی شعاعوں کے پنسل کی ہر شعاع مکافی کے محور کے متوازی ہے۔

ثابت کرو کہ مکافی کے مقعر حصّہ پر منعکس ہونے کے بعد یہ شعاعیں مکافی کے ماسکہ میں سے گزرتی ہیں ۔

(۱۵) مکافی ما۲ = ۸ لا اور خطِ مستقیم ۲ لا ۔ ۳ ما ۔ ۵ = ۰ کے نقاطِ تقاطع پر کے مماسات کا نقطۂ تقاطع معلوم کرو ۔

[جواب (۔ ۵/۲ ، ۶)]

(۱۶) اگر مکافی ما۲ = ۴ ا لا کے لحاظ سے نقطہ ن کا قطبی نقطہ ن۱ میں سے گزرے تو ثابت کرو کہ نقطۂ ن۱ کا قطبی نقطہ ن میں سے گزریگا ۔

نوٹ :۔ ایسے دو نقطے مکافی کے لحاظ سے مزدوج نقطے کہلاتے ہیں ۔

(۱۷) مکافی ما۲ = ۴ ا لا کے لحاظ سے خطِ مستقیم ل لا + م ما + ن = ۰ کے قطب کے محدد معلوم کرو ۔

[جواب (ن/ل ، ۔۲ ا م/ل)]

(۱۸) دائرہ لا۲ + ما۲ = ۴ کے کسی مماس کا قطب مکافی ما۲ = ۴ لا کے لحاظ سے لیا گیا ہے ۔ قطب کے طریق کی مساوات حاصل کرو ۔

[جواب (لا۲ ۔ ما۲ ۔ ۴ = ۰)]

(۱۹) مکافی ما۲ = ۲ لا کے وتر لا ۔ ما = ۰ کے وسطی نقطہ کے محدد معلوم کرو۔

[جواب (۱، ۱)]

(۲۰) مکافی ما۲ = ۱۲ لا کے وتر ۶ لا ۔ ما ۔ ۵ = ۰ کے وسطی نقطہ کے محدد معلوم کرو

[جواب (۱، ۱)]

(۲۱) مکافی ما۲ = ۱۲ لا کے اُن عمادوں کی مساواتیں معلوم کرو جو نقطہ (۹، ۰) میں سے گزرتے ہیں ۔

[جواب لا + ما ۔ ۹ = ۰ اور لا ۔ ما ۔ ۹ = ۰]

(۲۲) ثابت کرو کہ مکافی کے مرتب پر کے کسی نقطہ کا قطبی جو مکافی کے لحاظ سے

لیا گیا ہے مکافی کے ماسکہ میں سے گزرتا ہے ۔

(۲۳) مکافی کے مرتب پر کے کسی نقطہ سے مکافی کے مماسات کا جوڑا کھینچا گیا ہے ثابت کرو کہ یہ مماسات ایک دُوسرے پر عمود وار ہیں ۔

(۲۴) ثابت کرو کہ مکافی کے دو علی القوائم مماسات کا نقطۂ تقاطع مکافی کے مرتب پر ہوتا ہے

(۲۵) مکافی م^2 = ۴ لا اور دائرہ لا^2 + م^2 = ۵ کا زاویۂ تقاطع معلوم کرو ۔

نوٹ :۔ دو منحنیوں کے زاویۂ تقاطع سے مُراد اِن کے نقطۂ تقاطع پر اِن کے مماسات کا درمیانی زاویہ ہے ۔

(جواب ۔ دائرہ مکافی کو دو حقیقی نقطوں پر قطع کرتا ہے ۔ اور ان نقطوں پر مکافی اور دائرہ ایک دُوسرے کو ایک ہی زاویہ پر قطع کرتے ہیں ۔ یہ زاویہ مس$^{-1}$ ۳ ہے ۔)

پانچواں باب

قطع ناقص

۱ء۵ - قطع ناقص کی تعریف - ایک ثابت خطِ مستقیم وَ کَ اور ایک ثابت نقطہ سَ دیے ہوئے ہیں۔ ایک متغیر نقطہ ن اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اگر ن سے وَ کَ پر عمود ن مَ ڈالا جائے تو

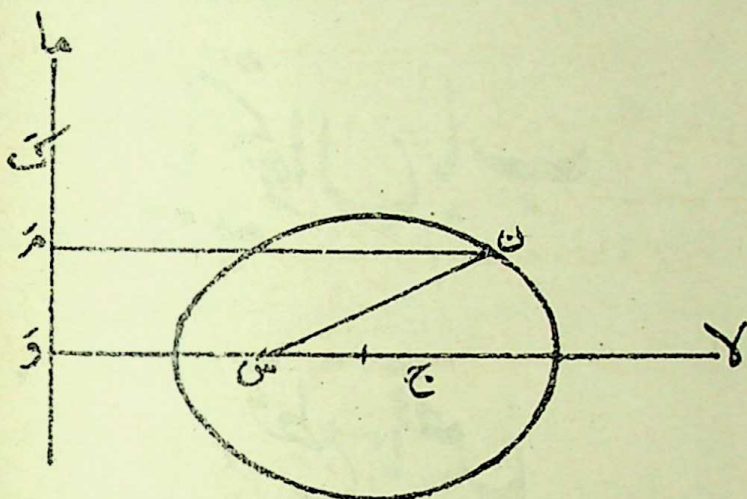
سَ ن = ز × ن مَ .... (۱)

جہاں ز ایک کسرِ واجب ہے جو ایک سے کم ہے۔ متحرک نقطہ ن کے طریق کو "ناقص" کہتے ہیں۔ ثابت نقطہ سَ کو "ماسکہ" اور ثابت خط وَ کَ کو "مرتب" اور کسر ز کو **خروج المرکز** کہتے ہیں۔

۱۱ء۵ - ناقص کی مساوات (معیاری شکل) :-

فرض کرو کہ ماسکہ سَ سے مرتب وَ کَ پر عمود سَ وَ ڈالا گیا ہے اور فاصلہ

سَ وَ = د .... (۲)

و کو مبداء، خط و س کو محور لا اور خط و ک کو محور ما لیتے ہیں۔

فرض کرو کہ ناقص پر کے کسی نقطہ ن کے محدد (لا، ما) ہیں۔ تو چونکہ

ن س = ز × ن م

اس لیے (س ن)^{2} = ز^{2} (ن م)^{2}

یعنی (لا ـ و)^{2} + ما^{2} = ز^{2} لا^{2}

یعنی لا^{2} (۱ ـ ز^{2}) ـ ۲ لا و + ما^{2} = ـ و^{2}

یعنی (۱ ـ ز^{2}) { لا^{2} ـ $\frac{\text{۲ لا و}}{\text{۱ ـ ز}^{2}}$ } + ما^{2} = ـ و^{2}

اس آخری مساوات میں سیدھے طرف بڑے قوسین کے اندر کے جملہ کو ہم کامل مربع بناتے ہیں اور اسی قدر رقم کا بائیں طرف اضافہ کرتے ہیں تاکہ مساوات میں فرق نہ آئے۔

(۱ ـ ز^{2}) { لا^{2} ـ $\frac{\text{۲ لا و}}{\text{۱ ـ ز}^{2}}$ + $\frac{\text{و}^{2}}{(\text{۱ ـ ز}^{2})^{2}}$ } + ما^{2} = ـ و^{2} + $\frac{\text{و}^{2}}{\text{۱ ـ ز}^{2}}$

یعنی $(1-\text{ز}^2)\left\{\text{لا} - \frac{\text{د}}{1-\text{ز}^2}\right\}^2 + \text{ما}^2 = \frac{\text{د}^2\,\text{ز}^2}{1-\text{ز}^2}$

یعنی $\left(\text{لا} - \frac{\text{د}}{1-\text{ز}^2}\right)^2 + \frac{\text{ما}^2}{1-\text{ز}^2} = \frac{\text{د}^2\,\text{ز}^2}{(1-\text{ز}^2)^2}$ ....(۳)

مساوات (۳) ناقص کی ایک مساوات ہے لیکن ابھی یہ معیاری شکل میں نہیں ہے۔ سادہ سے سادہ شکل میں مساوات حاصل کرنے کے لیے ہمیں مبداء کو سیدھی طرف نقطۂ ج پر منتقل کرنا چاہیے جو خط وَسَ پر واقع ہے

اور جس کا فاصلہ وَ سے $\frac{\text{د}}{1-\text{ز}^2}$ ہے۔ اب چونکہ $\text{ز} < 1$ اس لیے

$$\frac{\text{د}}{1-\text{ز}^2} > \text{د}$$

یعنی $\text{وَج} > \text{وَسَ}$ ....(۴)

اس لیے معلوم ہوا کہ نیا مبداء ج نقطۂ سَ کی سیدھی طرف واقع ہے۔ نقطۂ ج میں سے نئے محوروں (لاَ، ماَ) کو ہم پرانے محوروں کے متوازی لیتے ہیں تو نئے محدد پرانے محددوں کی رقوم میں حسبِ ذیل حاصل ہوتے ہیں

$$\left.\begin{aligned} \text{لاَ} &= \text{لا} - \frac{\text{د}}{1-\text{ز}^2} \\ \text{ماَ} &= \text{ما} \end{aligned}\right\} \quad \text{.........................(۵)}$$

مساوات (۳) میں (۵) کو درج کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$\text{لاَ}^2 + \frac{\text{ماَ}^2}{1-\text{ز}^2} = \frac{\text{د}^2\,\text{ز}^2}{(1-\text{ز}^2)^2} \quad \text{..............(۶)}$$

اب ہم اس مساوات میں سے زبروں کو نکال دیتے ہیں لیکن یہ یاد رکھتے ہیں کہ یہ مساوات نقطۂ ج کو مبداء لینے پر حاصل ہوتی ہے اور

مساوات (۳) نقطہ و کو مبداء لینے پر حاصل ہوئی تھی ۔ زبرین نکال دینے سے مساوات ہوجاتی ہے:

$$\text{لا}^2 + \frac{\text{ما}^2}{\text{۱} - \text{ز}^2} = \frac{\text{د}^2\,\text{ز}^2}{(\text{۱} - \text{ز}^2)^2} \quad \ldots\ldots (\text{۷})$$

اب ہم لکھتے ہیں

$$\text{ل}^2 = \frac{\text{د}^2\,\text{ز}^2}{(\text{۱} - \text{ز}^2)^2}$$

یعنی

$$\text{ل} = \frac{\text{د}\,\text{ز}}{\text{۱} - \text{ز}^2} \quad \ldots\ldots (\text{۸})$$

تو مساوات (۷) ہوجاتی ہے

$$\text{لا}^2 + \frac{\text{ما}^2}{\text{۱} - \text{ز}^2} = \text{ل}^2$$

اور دونوں طرف ل^2 پر تقسیم کرنے سے

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ل}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ل}^2(\text{۱} - \text{ز}^2)} = \text{۱} \quad \ldots\ldots (\text{۹})$$

پھر ہم لکھتے ہیں

$$\text{ب}^2 = \text{ل}^2(\text{۱} - \text{ز}^2) \quad \text{یعنے} \quad \text{ب} = \text{ل}\sqrt{\text{۱} - \text{ز}^2} \quad \ldots\ldots (\text{۱۰})$$

تو مساوات (۹) ذیل کی شکل اختیار کرتی ہے

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ل}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = \text{۱} \quad \ldots\ldots (\text{۱۱})$$

ناقص کی یہ مساوات (۱۱) سادہ ترین شکل میں ہے اور اسی کو معیاری مساوات کہتے ہیں ۔ ہم نے اوپر دیکھا ہے کہ نقطہ ج (جس کو ناقص کا "مرکز" کہتے ہیں) کو مبداء لینے، مرتب کے متوازی خط کو محور ما اور ماسکہ سے مرتب پر علی القوائم خط کو محور لا لینے سے یہ معیاری مساوات حاصل ہوتی ہے۔

۵،۱۲ - ناقص کی شکل -

یہ دریافت کرنے کے لیے کہ محور لا ناقص کو کہاں قطع کرتا ہے ہم گذشتہ دفعہ کی مساوات (۱۱) میں ما = ۰ رکھتے ہیں جس سے ملتا ہے

لا۲ = ل۲ یعنے لا = + ل یا لا = - ل

فرض کرو کہ لا = ل کے جواب میں ناقص پر نقطۂ ا اور لا = - ل کے جواب میں نقطۂ اَ ملتے ہیں۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ا اَ کا طول ۲ ل ہے یعنی

ا اَ = ۲ ل .... (۱)

پھر یہ دریافت کرنے کے لیے کہ محور ما ناقص کو کہاں قطع کرتا ہے ناقص کی مساوات میں ہم لا = ۰ رکھتے ہیں تو ملتا ہے

ما۲ = ب۲ یعنے ما = + ب یا ما = - ب

فرض کرو کہ ما = ب کے جواب میں ناقص پر نقطہ ب اور ما = - ب کے جواب میں ناقص پر نقطۂ بَ ملتا ہے تب ظاہر ہے کہ ب بَ کا طول ۲ ب ہے یعنی

ب بَ = ۲ ب .... (۲)

اس کے علاوہ ناقص کی مساوات کو ذیل کی شکلوں میں سے کسی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔

ما = ± ب √(۱ - لا۲/ل۲) .... (۳)

لا = ± ل √(۱ - ما۲/ب۲) .... (۴)

مساوات (۳) سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر لا۲ > ل۲ یعنی اگر لا > ل یا < - ل تو ما کی قیمت حقیقی حاصل نہیں ہوتی۔ اس لیے ظاہر ہے کہ منحنی کا کوئی حصہ نقطۂ ا کی سیدھی طرف یا نقطہ اَ کی بائیں طرف واقع نہیں ہے۔

اسی طرح مساوات (۴) سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر ما^۲ > ب^۲ یعنے اگر ما > ب یا < ۔ب تو لا کی حقیقی قیمت حاصل نہیں ہوتی اس لیے ظاہر ہے کہ منحنی کا کوئی حصہ نقطۂ ب کے اُوپر یا نقطۂ بَ کے نیچے واقع نہیں ہے۔

اگر لا کی قیمت ۔ا اور + ا کے درمیان واقع ہو تو مساوات (۳) سے ما کی دو مساوی اور مختلف العلامت قیمتیں ملتی ہیں جس سے معلوم ہوتا ہے کہ منحنی محور لا کے گرد "متشاکل" ہے۔

اسی طرح اگر ما کی قیمت ۔ب اور + ب کے درمیان واقع ہو مساوات (۴) سے لا کی دو مساوی اور مختلف العلامت قیمتیں ملتی ہیں جس سے ظاہر ہے کہ منحنی محور ما کے گرد متشاکل ہے۔

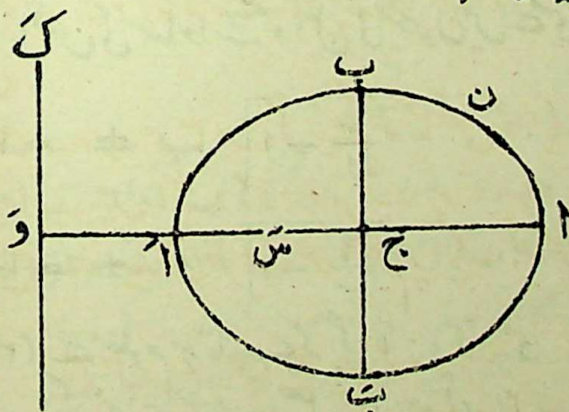
گذشتہ دفعہ کی مساوات (۱۰) میں ہم نے دیکھا تھا کہ

ب^۲ = ا^۲ (۱ ـ ز^۲)

لیکن چونکہ ز < ۱ اس لیے ۱ ـ ز^۲ < ۱ اور اس لیے

∴ ب^۲ < ا^۲ یعنے ب < ا . . . . (۵)

اس سے ہم کو معلوم ہوتا ہے کہ خط ب بَ چھوٹا ہے خط ا اَ سے۔
اسی لیے ا اَ کو "محورِ اعظم" اور ب بَ کو "محورِ اصغر" کہتے ہیں۔

ذیل میں ناقص کی شکل دی گئی ہے جس میں مذکورۂ بالا نقطوں اور خطوں کو ظاہر کیا گیا ہے۔

نقاط ا اور اَ کو ناقص کے راس کہتے ہیں۔

۲ء۵ - اس دفعہ میں ہم ج سَ کا فاصلہ دریافت کرینگے اور اس کو ا اور ز کی رقوم میں بیان کرینگے - دفعہ (۱۱ء۵) کی مساواتوں (۳)، (۵) اور (۸) کی بناء پر معلوم ہے کہ

$$\text{وَسَ} = \text{د}$$

$$\text{وَج} = \frac{\text{د}}{\text{۱} - \text{ز}^{\text{۲}}}$$

$$\text{اَج} = \text{ا} = \frac{\text{د ز}}{\text{۱} - \text{ز}^{\text{۲}}}$$

اس لیے

$$\text{سَج} = \text{وَج} - \text{وَسَ}$$

$$= \frac{\text{د}}{\text{۱} - \text{ز}^{\text{۲}}} - \text{د} = \frac{\text{د ز}^{\text{۲}}}{\text{۱} - \text{ز}^{\text{۲}}}$$

$$= \text{ز} \times \text{اَج} = \text{ا ز} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{۱})$$

اسی طرح

$$\text{وَج} = \text{اَج} \times \frac{\text{۱}}{\text{ز}}$$

$$= \frac{\text{ا}}{\text{ز}} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{۲})$$

مساواتیں (۱) اور (۲) مرکز سے بالترتیب ماسکہ اور مرتب کے فاصلہ کو ظاہر کرتی ہیں -

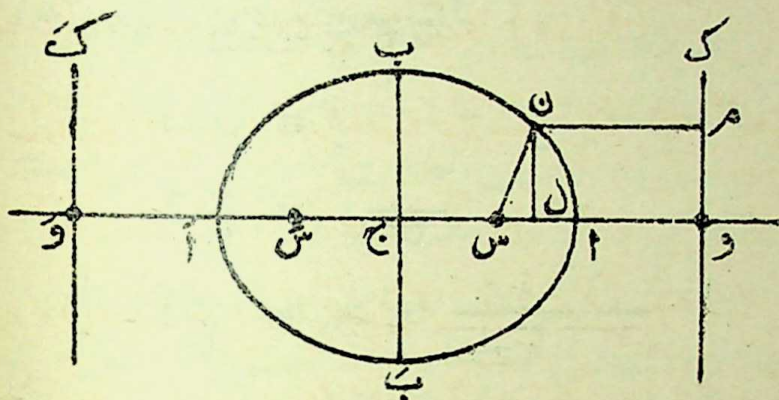
۳ء۵ - اب ہم ثابت کرینگے کہ ناقص کا ایک دُوسرا ماسکہ اور اس کے جواب میں ایک دُوسرا مرتب ہوتا ہے -

مرکز ج سے سیدھی طرف محورِ اعظم پر ایک نقطہ س اس طرح لو کہ

$$\text{ج س} = \text{سَ ج} = \text{ا ز} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{۱})$$

اور اسی طرح محورِ اعظم ممدودہ پر سیدھی طرف ایک نقطہ و

ایسا لو کہ

$$ج و = وَ ج = \frac{ا}{ز} \quad .... (۲)$$

نقطۂ و سے وک خط و وَ پر عمود کھینچو۔
اب ہم ثابت کرینگے کہ نقطۂ س ناقص کا دُوسرا ماسکہ اور خط وک دُوسرا مرتب ہے۔
ناقص پر کوئی نقطہ ن لو جس کے محدّد (لا، ما) ہیں۔ ن س کو ملاؤ اور ن سے خط وک پر عمود ن م اور خط ج و پر عمود ن ل ڈالو۔
تب

$$ن م = ل و$$
$$= ج و - ج ل$$
$$= \frac{ا}{ز} - لا \quad .... (۳)$$

اور

$$ن س^۲ = س ل^۲ + ن ل^۲ = (ج ل - ج س)^۲ + ن ل^۲ = (لا - ا ز)^۲ + ما^۲ - \quad (۴)$$

اب چونکہ نقطۂ ن کے محدّد ناقص کی مساوات کو پُورا کرتے ہیں اس لیے

$$\frac{لا^۲}{ا^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۱$$

یعنی

$$\frac{لا^{۲}}{و^{۲}} + \frac{ما^{۲}}{و^{۲}(۱-ز^{۲})} = ۱$$

یعنی

$$لا^{۲}(۱-ز^{۲}) + ما^{۲} = و^{۲}(۱-ز^{۲})$$

اس مساوات کو پھیلانے اور مختلف ترتیب دینے سے حاصل ہوتا ہے

$$لا^{۲} + و^{۲}ز^{۲} + ما^{۲} = ز^{۲}لا^{۲} + و^{۲}$$

پھر دونوں طرف ۲ و ز لا تفریق کرنے سے ملتا ہے

$$لا^{۲} - ۲وزلا + و^{۲}ز^{۲} + ما^{۲} = ز^{۲}لا^{۲} - ۲وزلا + و^{۲}$$

$$= ز^{۲}\left(لا^{۲} - \frac{۲ولا}{ز} + \frac{و^{۲}}{ز^{۲}}\right)$$

پس

$$(لا - وز)^{۲} + ما^{۲} = ز^{۲}\left(لا - \frac{و}{ز}\right)^{۲} \quad \ldots\ldots\ldots(۵)$$

مساواتوں (۳)، (۴) اور (۵) سے ظاہر ہے کہ

$$ن س^{۲} = ز^{۲} \times ن م^{۲}$$

یعنی

$$ن س = ز \times ن م \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(۶)$$

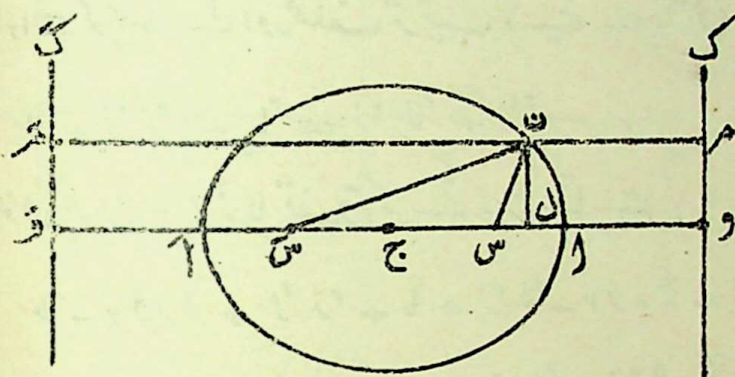
مساوات (۶) سے معلوم ہوتا ہے کہ نقطۂ ن اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک ثابت نقطۂ س سے اس کا فاصلہ متناسب ہے ایک ثابت خطِ مستقیم و ک پر ن سے عمود کے۔

پس نقطۂ س ناقص کا ماسکہ اور خط و ک ناقص کا مرتب ہے۔

۱۳۵ - اس دفعہ میں ہم ناقص کی ایک بہت زیادہ مشہور اور اہم خاصیت ثابت کرینگے۔

ناقص پر کوئی نقطہ ن لو اور اس کو دونوں ماسکوں س اور سَ سے ملاؤ۔ ہم ثابت کرینگے کہ خواہ نقطۂ ن کہیں واقع ہو ن س اور ن سَ کا مجموعہ

مستقل ہوگا اور ۲ لا کے برابر ہوگا یعنے ہم ثابت کرینگے کہ

ن س + ن سَ = مستقل = ۲ لا .... (۱)

اس مسئلہ کا ثبوت ہم پہلے بالکل تحلیلی طریقہ پر دینگے ۔

ن س^{2} = س ل^{2} + ل ن^{2}

= (ج ل ـ ج س)^{2} + ل ن^{2}

= (لا ـ ا ز)^{2} + ما^{2} .... (۲)

لیکن ناقص کی مساوات

لا^{2} / ا^{2} + ما^{2} / ا^{2} (۱ ـ ز^{2}) = ۱

سے حاصل ہوتا ہے

ما^{2} = ا^{2} (۱ ـ ز^{2}) ـ لا^{2} (۱ ـ ز^{2})

= ا^{2} ـ ا^{2} ز^{2} ـ لا^{2} + لا^{2} ز^{2} .... (۳)

اس قیمت کو مساوات (۲) میں رکھنے سے ملتا ہے:

$$ن س^{۲} = (لا - ا ز)^{۲} + ا^{۲} - ا^{۲} ز^{۲} - لا^{۲} + لا^{۲} ز^{۲}$$

$$= لا^{۲} - ۲ ا ز لا + ا^{۲} ز^{۲} + ا^{۲} - ا^{۲} ز^{۲} - لا^{۲} + لا^{۲} ز^{۲}$$

$$= ا^{۲} - ۲ ا ز لا + لا^{۲} ز^{۲}$$

$$= (ا - ز لا)^{۲}$$

پس

$$ن س = ا - ز لا \quad \ldots\ldots (۴)$$

اسی طرح

$$ن سَ^{۲} = سَ لَ^{۲} + ل ن^{۲}$$

$$= (سَ ج + ج ل)^{۲} + ل ن^{۲}$$

$$= (ا ز + لا)^{۲} + ما^{۲}$$

$$= (ا ز + لا)^{۲} + (ا^{۲} - ا^{۲} ز^{۲} - لا^{۲} + لا^{۲} ز^{۲})$$

$$= ا^{۲} ز^{۲} + ۲ ا ز لا + لا^{۲} + ا^{۲} - ا^{۲} ز^{۲} - لا^{۲} + لا^{۲} ز^{۲}$$

$$= ا^{۲} + ۲ ا ز لا + ز^{۲} لا^{۲}$$

یعنے

$$ن سَ = ا + ز لا \quad \ldots\ldots (۵)$$

اس لیے مساواتوں (۴) اور (۵) سے

$$ن س + ن سَ = (ا - ز لا) + (ا + ز لا)$$

$$= ۲ ا \quad \ldots\ldots (۶)$$

جس سے ہمارا مسئلہ ثابت ہو جاتا ہے۔

متبادل ثبوت: اسی مسئلہ کا ایک نہایت مختصر ہندسی ثبوت بھی دیا جا سکتا ہے۔

ناقص کی تعریف کے بموجب ہمیں معلوم ہے کہ

ن س = ز × ن م

اور

ن سَ = ز × ن مَ

پس

ن س + ن سَ = ز (ن م + ن مَ)

= ز × م مَ

= ز × وَ و

= ز × ۲ ج و

= ز × ۲ ل/ز (کیونکہ ج و = ل/ز)

= ۲ ل

اسی طرح ن س اور ن سَ کی قیمتیں علیحدہ علیحدہ حسب ذیل طریقہ پر بھی معلوم کی جا سکتی ہیں:-

ن س = ز × ن م = ز × ل و

= ز (ج و - ج ل)

= ز (ل/ز - لا)

= ل - ز لا

اور

ن سَ = ز × مَ ن = ز (وَ ل)

= ز (و ج + ج ل)

= ز ($\frac{ل}{ز}$ + لا)

= ل + ز لا

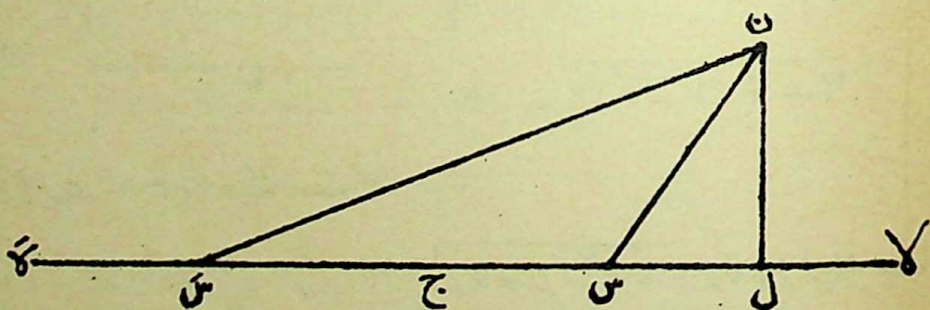
غرض اس مسئلہ سے ہم کو معلوم ہوتا ہے کہ ناقص پر کے کسی نقطہ کے ماسکی فاصلوں کا مجموعہ محور اعظم کے برابر ہوتا ہے۔

نوٹ۔ ہم نے اس مسئلہ کے دو ثبوت عمداً دیے ہیں۔ اس کتاب میں اب تک طالب علم کو علم ہندسہ کے مشہور مسائل سے سابقہ پڑا ہوگا جن کے ثبوت تحلیلی طریقہ پر نہایت آسانی سے حاصل ہو جاتے ہیں لیکن یہ تصویر کا صرف ایک پہلو ہے۔

بعض دفعہ ایسا بھی ہوتا ہے کہ ایک مسئلہ کا اقلیدسی ثبوت تحلیلی ثبوت کی بہ نسبت زیادہ مختصر اور آسان ہوتا ہے۔ زیر بحث مسئلہ سے یہ امر کافی طور پر واضح ہے۔ تاہم یہ یاد رہنا چاہیے کہ تحلیلی طریقہ ہندسی طریقہ کی نسبت بہت زیادہ وسیع اور طاقتور ہے اور ہر مسئلہ پر اس کا استعمال ہو سکتا ہے

۵ء۳۲ - اب ہم یہ ثابت کرینگے کہ گزشتہ مسئلہ کا عکس بھی صحیح ہے یعنے یہ کہ اگر کوئی نقطہ ن ایک مستوی میں اس طرح حرکت کرے کہ دو ثابت نقطوں، س اور سَ سے اس کے فاصلوں کا مجموعہ مستقل ہو تو اس نقطہ ن کا طریق ایک ناقص ہوگا۔

ن

گا سَ ج س ل لا

خط س سَ کے نقطۂ تنصیف ج کو مبداء فرض کرو اور اس خط کو محور لا لو۔

فرض کرو کہ

ن س + ن سَ = ۲ ا .... (۱)

تو ظاہر ہے کہ ج س اور ج سَ میں سے ہر ایک ا سے کم ہے۔
فرض کرو کہ

ج س = ز ا .... (۲)

جہاں ز ایک کسر واجب ہے یعنے اکائی سے کم ہے۔
اب فرض کرو کہ ن کے محدد (لا، ما) ہیں تو

ن س^۲ = (ج ل - ج س)^۲ + ن ل^۲

= (لا - ا ز)^۲ + ما^۲ .... (۳)

اور اسی طرح

ن سَ^۲ = (ج ل + سَ ج)^۲ + ن ل^۲

= (لا + ا ز)^۲ + ما^۲ .... (۴)

پس ان قیمتوں کو مساوات (۱) میں رکھنے پر

√((لا - ا ز)^۲ + ما^۲) + √((لا + ا ز)^۲ + ما^۲) = ۲ ا

یعنے

√((لا - ا ز)^۲ + ما^۲) = ۲ ا - √((لا + ا ز)^۲ + ما^۲)

دونوں طرف مربع لینے سے ملتا ہے

(لا - ا ز)^۲ + ما^۲ = ۴ ا^۲ - ۴ ا √((لا + ا ز)^۲ + ما^۲) + (لا + ا ز)^۲ + ما^۲

مختصر کرنے اور ترتیب دینے سے حاصل ہوتا ہے

٤ ا √((لا + ا ز)² + ما²) = (لا + ا ز)² − (لا − ا ز)² + ٤ ا²

= ٤ ا ز لا + ٤ ا²

یعنی

√((لا + ا ز)² + ما²) = ز لا + ا

پھر دوبارہ مربع لینے پر ملتا ہے

(لا + ا ز)² + ما² = (ا + ز لا)²

یعنی پھیلانے پر حاصل ہوتا ہے

لا² + ٢ ا ز لا + ا² ز² + ما² = ا² + ٢ ا ز لا + ز² لا²

اس کو مختصر کرنے اور ترتیب دینے پر ملتا ہے

لا² (١ − ز²) + ما² = ا² (١ − ز²)

اس مساوات کو دونوں طرف ا² (١ − ز²) پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

لا² / ا² + ما² / ا² (١ − ز²) = ١

اور بالآخر اگر ا² (١ − ز²) کو جو ایک مستقل ہے ب² سے تعبیر کریں تو مساوات ہو جاتی ہے

لا² / ا² + ما² / ب² = ١

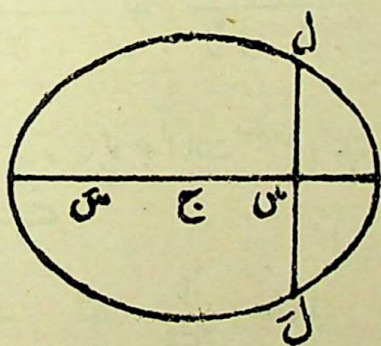
جو ایک ناقص کی مساوات ہے۔ پس معلوم ہوا کہ ن کا طریق ایک ناقص ہے۔

۵،۳۳۔ ناقص کو ترسیم کرنے کا عملی طریقہ۔

ناقص کی مذکورۂ بالا خاصیت کی بنا پر ہمیں اس منحنی کو ترسیم کرنے کا ایک عملی طریقہ ہاتھ آتا ہے۔

دھاگہ کا ایک ٹکڑا لو جس کا طول مطلوبہ ناقص کے محورِ اعظم کے برابر ہو۔ اور اس کے سروں کو دو ثابت نقطوں س اور سَ پر باندھ دو۔ یہ نقطے ناقص کے ماسکے ہیں۔

ایک پنسل کی نوک کو کاغذ پر اس طرح حرکت دو کہ نوک ہمیشہ دھاگے کو مس کرتی رہے اور اس کے علاوہ پنسل اور ثابت نقطوں کے درمیانی دونوں حصّے ہمیشہ بالکل تنے ہوئے رہیں۔ اگر پنسل کی نوک ان شرائط کے ساتھ ایک پورا چکر کرے تو اس سے ایک ناقص مرتسم ہوگا۔ کیونکہ پنسل کی نوک ہمیشہ ایسے مقام پر ہوگی کہ س اور سَ سے اس کے فاصلوں کا مجموعہ دھاگہ کے طول یعنے محورِ اعظم کے برابر ہوگا۔

۵،۳۴۔ ناقص کا وترِ خاص۔

تعریف۔ ماسکہ س میں سے محورِ اعظم پر علی القوائم ایک خط کھینچو جو منحنی کو دونوں طرف نقطوں ل اور لَ پر ملے۔ خط ل لَ کو ناقص کا

"وترِ خاص" کہتے ہیں اور س ل کو "نصف وترِ خاص"۔

ہم نصف وترِ خاص س ل کا طول معلوم کرینگے۔ فرض کرو کہ یہ طول ل ہے تو نقطہ ل کے محدد (ج س، س ل) یعنے (ا ز، ل) ہونگے اور چونکہ نقطہ ل ناقص پر واقع ہے اس لیے یہ محدد ناقص کی مساوات کو پورا کرینگے پس

$$\frac{(ا ز)^2}{ا^2} + \frac{ل^2}{ب^2} = ۱$$

یعنے

$$ل^2 = ب^2 (۱ - ز^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

لیکن چونکہ

$$ب^2 = ا^2 (۱ - ز^2)$$

اس لیے

$$۱ - ز^2 = \frac{ب^2}{ا^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

مساواتوں (۱) اور (۲) سے ملتا ہے۔

$$ل^2 = \frac{ب^4}{ا^2}$$

اس لیے

$$ل = \frac{ب^2}{ا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

پس وترِ خاص $= ۲ ل = ۲ \frac{ب^2}{ا}$ $\ldots\ldots\ldots\ldots (۴)$

۵۳۵ ۔ اب ہم خروج المرکز (ز) کی قیمت محوروں کی رقوم میں معلوم کرینگے۔

گذشتہ دفعہ کی مساوات (۲) سے حاصل ہوتا ہے

$$۱ - ز^2 = \frac{ب^2}{ا^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

پس $\text{ز}^۲ = ۱ - \frac{\text{ب}^۲}{\text{و}^۲}$

$= \frac{۱}{\text{و}^۲}\left(\text{و}^۲ - \text{ب}^۲\right)$

اور

$\text{ز} = \sqrt{۱ - \frac{\text{ب}^۲}{\text{و}^۲}}$ ....(۲)

$= \frac{۱}{\text{و}}\sqrt{\text{و}^۲ - \text{ب}^۲}$ ....(۳)

مثال۔ ناقص $\frac{\text{لا}^۲}{۶۲۵} + \frac{\text{ما}^۲}{۴۰۰} = ۱$ کا خروج المرکز اور وترِ خاص کا طول معلوم کرو

یہاں $\text{و} = ۲۵$، $\text{ب} = ۲۰$ اس لیے

$\text{ز} = \frac{\sqrt{\text{و}^۲ - \text{ب}^۲}}{\text{و}} = \frac{\sqrt{۶۲۵ - ۴۰۰}}{۲۵} = \frac{\sqrt{۲۲۵}}{۲۵} = \frac{۱۵}{۲۵} = \frac{۳}{۵}$

اور $\text{ل} = \frac{\text{ب}^۲}{\text{و}} = \frac{۴۰۰}{۲۵} = ۱۶$

پس وترِ خاص $= ۲\text{ل} = ۳۲$

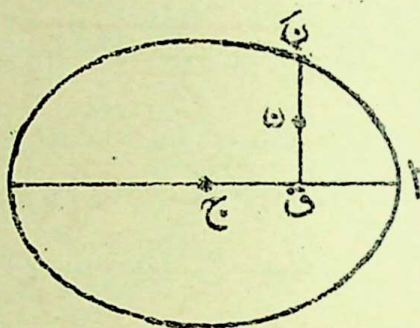
نیز چونکہ $\text{ب}^۲ = \text{و}^۲\left(۱ - \text{ز}^۲\right)$

اس لیے $\text{ل} = \frac{\text{ب}^۲}{\text{و}} = \frac{\text{و}^۲\left(۱ - \text{ز}^۲\right)}{\text{و}} = \text{و}\left(۱ - \text{ز}^۲\right)$

$= ۲۵\left(۱ - \frac{۹}{۲۵}\right) = ۱۶$

اس طرح سے بھی وترِ خاص کی قیمت وہی ۳۲ حاصل ہوتی ہے۔

۵۱۴۔ اب ہم یہ دریافت کریںگے کہ اگر نقطہ ن ناقص پر واقع نہ ہو بلکہ اس کے اندر یا باہر کہیں واقع ہو تو محددوں میں کیا رشتہ ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ نقطۂ ن ناقص کے اندر واقع ہے اور اس کے محدّد (لاَ، ماَ) ہیں۔ نقطۂ ن سے محورِ اعظم ج ا پر عمود ن ق ڈالو اور ق ن کو اوپر اس قدر

بڑھاؤ کہ ناقص کے منحنی سے نقطۂ نَ پر ملے۔ فرض کرو کہ ق نَ = ما

لیکن ج ق = لاَ اور ق ن = ماَ۔

اب چونکہ نقطۂ نَ ناقص پر واقع ہے اس لیے اس کے محدّد (لاَ، ما) ناقص کی مساوات کو پورا کرتے ہیں یعنی

$$\frac{لاَ^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$$

لیکن ق ن < ق نَ یعنی ماَ < ما اس لیے

$$\frac{لاَ^2}{ا^2} + \frac{ماَ^2}{ب^2} < \frac{لاَ^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2}$$

پس معلوم ہوا کہ

$$\frac{لاَ^2}{ا^2} + \frac{ماَ^2}{ب^2} < ۱ \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

اسی طرح اگر نقطۂ ن (لاَ، ماَ) ناقص کے باہر واقع ہو تو شکل بنا کر آسانی سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ

$$\frac{لاَ^2}{ل^2} + \frac{ماَ^2}{ب^2} > 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

پس کسی نقطہ (لاَ، ماَ) کے متعلق یہ معلوم کرنا ہو کہ وہ ناقص $\frac{لا^2}{ل^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = 1$ کے لحاظ سے کہاں واقع ہے تو جملہ $\frac{لاَ^2}{ل^2} + \frac{ماَ^2}{ب^2}$ کی قیمت دریافت کرنی چاہیے۔ اگر یہ قیمت اکائی سے کم ہے تو نقطہ ناقص کے اندر واقع ہے۔ اگر قیمت اکائی کے برابر ہے تو نقطہ ناقص کے منحنی پر واقع ہے اور اگر قیمت اکائی سے بڑی ہے تو نقطہ ناقص کے باہر واقع ہے۔

مثال - ایک ناقص کی مساوات $\frac{لا^2}{25} + \frac{ما^2}{16} = 1$ ہے۔ دریافت کرو کہ نقاط ا (۳، -۲)، ب (-۵، ۰)، ج (-۴، -۳) اس ناقص کے لحاظ سے کہاں واقع ہوتے ہیں۔

نقطوں کے محدد ناقص کی مساوات کے دائیں رکن میں درج کرتے ہیں۔

$\frac{(3)^2}{25} + \frac{(-2)^2}{16} = \frac{9}{25} + \frac{4}{16} < 1$ اس لیے نقطہ ا ناقص کے اندر واقع ہے۔

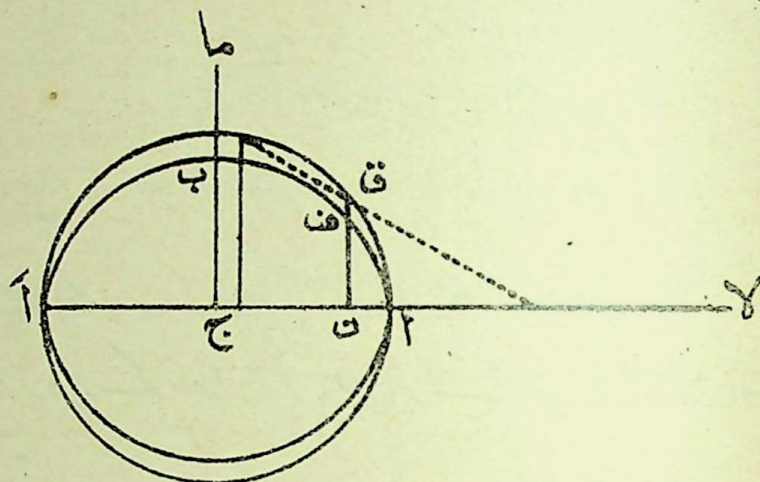
$\frac{(-5)^2}{25} + \frac{(0)^2}{16} = \frac{25}{25} + 0 = 1$ اس لیے نقطہ ب ناقص پر واقع ہے۔

$\frac{(-4)^2}{25} + \frac{(-3)^2}{16} = \frac{16}{25} + \frac{9}{16} > 1$ اس لیے نقطہ ج ناقص کے باہر واقع ہے۔

۵۵ - امدادی دائرہ -

تعریف — اگر محورِ اعظم ا اَ کو قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا جائے تو اس دائرہ کو ناقص کا "امدادی دائرہ" کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ ناقص پر کوئی نقطہ ف ہے اور ف ن اس نقطہ کا معین ہے۔ خط ن ف کو اوپر کی طرف خارج کرو کہ وہ امدادی دائرہ سے

نقطۂ ق پر ملے -

فرض کرو کہ

$$\text{ج ن} = \text{لا}' ،\quad \text{ن ف} = \text{ما}' ،\quad \text{ن ق} = \text{ما} \qquad \ldots\ldots (۱)$$

تو ف کے محدد (لا'، ما') اور ق کے محدد (لا'، ما) ہونگے -

اب چونکہ نقطہ ف ناقص پر واقع ہے اس لیے

$$\frac{\text{لا}'^2}{\text{و}^2} + \frac{\text{ما}'^2}{\text{ب}^2} = ۱ \qquad \ldots\ldots (۲)$$

اور چونکہ نقطۂ ق دائرہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{و}^2$ پر واقع ہے اس لیے

$$\text{لا}'^2 + \text{ما}^2 = \text{و}^2 \qquad \ldots\ldots (۳)$$

پس مساوات (۲) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ما}'^2}{\text{ب}^2} = ۱ - \frac{\text{لا}'^2}{\text{و}^2}$$

یعنی

$$\text{ما}'^2 = \text{ب}^2\left(۱ - \frac{\text{لا}'^2}{\text{و}^2}\right) \qquad \ldots\ldots (۴)$$

اور مساوات (۳) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ما}^2 = \text{و}^2 - \text{لا}'^2 = \text{و}^2\left(۱ - \frac{\text{لا}'^2}{\text{و}^2}\right) \qquad \ldots\ldots (۵)$$

مساواتوں (۴) اور (۵) سے ملتا ہے کہ

$$\frac{\text{ک}^2}{\text{ل}^2} = \frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}$$

یعنے

$$\frac{\text{ک}}{\text{ل}} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}} \quad \ldots\ldots (6)$$

پس $\frac{\text{ف ن}}{\text{ق ن}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{ا ج}} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}} \quad \ldots\ldots (7)$

امدادی دائرہ پر کے نقطۂ ق کو ناقص پر کے نقطہ ف کا "متناظر نقطہ" کہتے ہیں ۔

مساوات (۷) کو الفاظ میں اس طرح بیان کر سکتے ہیں کہ ناقص پر کے کسی نقطہ کے معیّن کو امدادی دائرہ پر کے متناظر نقطہ کے معیّن سے وہی نسبت ہے جو ب کو ا سے ہے یعنے جو ناقص کے محورِ اصغر کو محورِ اعظم سے ہے ۔

اس نتیجہ سے ظاہر ہے کہ ناقص کی تعریف حسبِ ذیل طریقہ پر بھی کی جا سکتی ہے :-

ایک دائرہ لو اور اس کا کوئی قطر ا اَ کھینچو ۔ دائرہ پر کے کسی نقطہ ق سے خط ا اَ پر عمود ق ن ڈالو ۔ عمود ق ن پر ایک نقطہ ف ایسا لو جو اس کو ایک دئی ہوئی مستقل نسبت سے تقسیم کرے ۔ تب نقطۂ ف کا طریق ایک ناقص ہوگا ۔

۵،۱۵ ۔ خارج المرکز زاویہ ۔

تعریف ۔ فرض کرو کہ ناقص پر کوئی نقطہ ف ہے ۔ ف کا معیّن ف ن کھینچو اور امدادی دائرہ پر ف کا متناظر نقطہ ق لو ۔ ق کو مرکز ج سے ملاؤ ۔

تو زاویۂ ن $\hat{\text{ج}}$ ق کو ناقص پر کے نقطۂ ف کا "خارج المرکز زاویہ" کہتے ہیں اور اس کو ھ سے تعبیر کرتے ہیں ۔

نقطۂ ف کے محدّدوں کو زاویۂ فہ کی رقوم میں حسبِ ذیل طریقہ پہ بیان کر سکتے ہیں :-

ج ن = ج ق جم فہ = ا جم فہ .... (۱)

اور

ن ق = ج ق جب فہ = ا جب فہ

لیکن گذشتہ دفعہ کی رُو سے ہم جانتے ہیں کہ

$ن ف = \frac{ب}{ا} ن ق$

اس لیے

$ن ف = \frac{ب}{ا}$ ا جب فہ = ب جب فہ ..... (۲)

پس نقطۂ ف کے محدّدوں کو (لا، ما) کی بجائے (ا جم فہ، ب جب فہ) سے تعبیر کیا جا سکتا ہے۔

۲۵۵ - مثال (۱) - اُس ناقص کی مساوات معلوم کرو جس کا ماسکہ س نقطہ (لا۱، ما۱)، مرتب خط ا لا + ب ما + ج = ۰ اور خروج المرکز (ز) ہے۔

فرض کرو کہ ناقص پر کا کوئی نقطہ ن (لاَ، ماَ) ہے۔ تو

$ن س = \{ (لاَ - لا_۱)^۲ + (ماَ - ما_۱)^۲ \}^{\frac{۱}{۲}}$ .... (۱)

نقطۂ ن سے مرتب ا لا + ب ما + ج = ۰ پر عمود ن ک ڈالو تو

$ن ک = \frac{ا لاَ + ب ماَ + ج}{\sqrt{ا^۲ + ب^۲}}$ .... (۲)

اب ناقص کی تعریف کے بموجب

ن س = ز × ن ک

یعنی

$$\left\{(\text{لاَ}-\text{لا}_1)^2+(\text{ماَ}-\text{ما}_1)^2\right\}^{\frac{1}{2}}=\text{ز}\,\frac{\text{و}\,\text{لاَ}+\text{ب}\,\text{ماَ}+\text{ج}}{\sqrt{\text{و}^2+\text{ب}^2}}$$

جذروں کو دُور کرنے کے لیے مربع لینے سے حاصل ہوتا ہے

$$(\text{لاَ}-\text{لا}_1)^2+(\text{ماَ}-\text{ما}_1)^2=\text{ز}^2\,\frac{(\text{و}\,\text{لاَ}+\text{ب}\,\text{ماَ}+\text{ج})^2}{\text{و}^2+\text{ب}^2}\quad\ldots\ldots(3)$$

مساوات (۳) سے نقطہ (لاَ، ماَ) کا طریق حسبِ ذیل ہوتا ہے:

$$(\text{لا}-\text{لا}_1)^2+(\text{ما}-\text{ما}_1)^2=\text{ز}^2\times\frac{(\text{و}\,\text{لا}+\text{ب}\,\text{ما}+\text{ج})^2}{\text{و}^2+\text{ب}^2}\quad\ldots\ldots(4)$$

جو ناقص کی مطلوبہ مساوات ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ یہ مساوات درجۂ دوم کی ہے لیکن متجانس نہیں ہے۔ اس مساوات کو پھیلا کر اور ترتیب دے کر اس طرح لکھ سکتے ہیں:

$$\text{لا}^2\left(\frac{\text{و}^2\text{ز}^2}{\text{و}^2+\text{ب}^2}-1\right)+2\,\text{لا}\,\text{ما}\left(\frac{\text{و}\,\text{ب}\,\text{ز}^2}{\text{و}^2+\text{ب}^2}\right)+\text{ما}^2\left(\frac{\text{ب}^2\text{ز}^2}{\text{و}^2+\text{ب}^2}-1\right)$$

$$+\ \text{پہلے درجہ کی رقمیں}\ +\ \text{مستقل رقم}=0\quad\ldots\ldots(5)$$

اب

$$\left(\frac{\text{و}^2\text{ز}^2}{\text{و}^2+\text{ب}^2}-1\right)\left(\frac{\text{ب}^2\text{ز}^2}{\text{و}^2+\text{ب}^2}-1\right)-\left(\frac{\text{و}\,\text{ب}\,\text{ز}^2}{\text{و}^2+\text{ب}^2}\right)^2$$

$$=\frac{\text{و}^2\text{ب}^2\text{ز}^4}{(\text{و}^2+\text{ب}^2)^2}-\frac{\text{و}^2\text{ز}^2}{\text{و}^2+\text{ب}^2}-\frac{\text{ب}^2\text{ز}^2}{\text{و}^2+\text{ب}^2}+1-\frac{\text{و}^2\text{ب}^2\text{ز}^4}{(\text{و}^2+\text{ب}^2)^2}$$

$$=1-\text{ز}^2>0$$

>0 (کیونکہ ز ناقص کے لیے اکائی سے کم ہے)

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ناقص کی مساوات (۵) میں

(لا² کا سر) × (ما² کا سر) − (۲ لا ما کا سر)²

مثبت ہے۔ ناقص کی ہر مساوات میں یہ خاصیت ضرور پائی جاتی ہے چنانچہ

معیاری مساوات پر بھی اس کی تصدیق بآسانی ہو سکتی ہے۔ آگے چل کر طالب علم کو معلوم ہوگا کہ اگر کسی دوسرے درجہ کی مساوات میں یہ خاصیت پائی جائے تو وہ مساوات ایک ناقص کو تعبیر کرتی ہے۔

مثال (۲) مساوات

۱۶ لا۲ + ۲۵ ما۲ ـ ۳۲ لا ـ ۱۵۰ ما ـ ۱۱۱ = ۰

سے جو ناقص تعبیر ہوتا ہے اس کا مرکز، اسکے مرتب، خروج المرکز اور محوروں کے طول معلوم کرو۔

مساوات بالا کو ہم اس طرح ترتیب دیتے ہیں:

(۱۶ لا۲ ـ ۳۲ لا) + (۲۵ ما۲ ـ ۱۵۰ ما) = ۱۱۱

یعنے
۱۶ (لا۲ ـ ۲ لا) + ۲۵ (ما۲ ـ ۶ ما) = ۱۱۱

یعنے قوسین کے اندر والے جملوں کو کامل مربع بنانے پر حاصل ہوتا ہے

۱۶ (لا۲ ـ ۲ لا + ۴) + ۲۵ (ما۲ ـ ۶ ما + ۹) = ۱۱۱ + ۶۴ + ۲۲۵

یعنے
۱۶ (لا ـ ۲)۲ + ۲۵ (ما ـ ۳)۲ = ۴۰۰

اب طرفین کو ۴۰۰ پر تقسیم کرنے سے

(لا ـ ۲)۲ / ۲۵ + (ما ـ ۳)۲ / ۱۶ = ۱

مبداء کو نقطۂ (۲، ۳) پر منتقل کرنے سے آخری مساوات تبدیل ہو کر

لا۲ / ۲۵ + ما۲ / ۱۶ = ۱

حاصل ہوتا ہے جو ناقص کی معیاری مساوات ہے۔ چونکہ نقطۂ (۲، ۳) کو مبداء لینے پر یہ مساوات حاصل ہوتی ہے اس لیے معلوم ہوا کہ ناقص کا مرکز ج یہی نقطہ یعنے (۲، ۳) ہے اور نیز محور اعظم ا = ۵ اور محور اصغر ب = ۴۔
اب خروج المرکز ز معلوم کرنے کے لیے ہم دفعہ (۵۳۵) کی

مساوات (۳) میں دیا ہوا رشتہ استعمال کرتے ہیں

$$ز = \frac{1}{ا}\sqrt{ا^2 - ب^2} = \frac{1}{5}\sqrt{25 - 16}$$

یعنے

$$ز = \frac{3}{5}$$

پھر ہم جانتے ہیں کہ ماسکے س اور س' محورِ اعظم پر مرکز سے فاصلہ + ا ز اور - ا ز پر واقع ہوتے ہیں۔ اس لیے س کے محدد (۲ + ا ز، ۳) اور س' کے محدد (۲ - ا ز، ۳) ہیں یعنے س کے محدد (۵، ۳) اور س' کے محدد (-۱، ۳) ہیں۔

چونکہ مرتب محورِ اعظم پر علی القوائم ہوتے ہیں اس لیے ظاہر ہے کہ وہ محور صا کے متوازی ہوں گے۔ اور نیز اگر مرکز سے مرتبوں پر عمودوں کے پائین و اور و' ہوں تو ہمیں معلوم ہے کہ

$$ج و = \frac{ا}{ز} = \frac{25}{3}،\quad ج و' = -\frac{25}{3}$$

اس لیے ایک مرتب $لا = 2 + \frac{25}{3} = 10\frac{1}{3}$

اور دوسرا مرتب $لا = 2 - \frac{25}{3} = -6\frac{1}{3}$

ہے۔

نیم وترِ خاص $ل = \frac{ب^2}{ا} = \frac{16}{5} = 3\frac{1}{5}$

مثال (۳) ثابت کرو کہ ایک ناقص کے کسی دو علی القوائم قطروں کے معکوس مربعوں کا مجموعہ مستقل ہوتا ہے۔

(دائرہ کی طرح ناقص کے قطر سے مراد بھی وہ وتر ہے جو مرکز میں سے گزرتا ہے)۔

فرض کرو کہ ناقص پر کے کسی نقطہ ن کے قطبی محدد (ر، ط) ہیں یعنے

$$ج ن = ر،\quad زاویہ\ ا ج ن = ط$$

اگر ن کے کارٹیزی محدد لا، یا ہوں تو ہم کو معلوم ہے کہ

لا = ر جم طہ١ ، یا = ر جب طہ١

ناقص کی مساوات میں درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ر^2 جم^2 طہ_1}{ا^2} + \frac{ر^2 جب^2 طہ_1}{ب^2} = 1$$

یعنی $\frac{1}{ر_1^2} = \frac{جم^2 طہ_1}{ا^2} + \frac{جب^2 طہ_1}{ب^2}$ ......(۱)

اب ناقص پر ایک دوسرا نقطہ ن٢ ایسا لیتے ہیں کہ زاویۂ ن١ ج ن٢ قائمہ ہو۔

فرض کرو کہ ن٢ کے کارٹیزی محدد (لا، یا) کے جواب میں قطبی محدد (ر٢، طہ٢) حاصل ہوتے ہیں یعنی

ج ن٢ = ر٢ ، زاویۂ ا ج ن٢ = طہ٢

اس لیے طہ٢ = زاویۂ ا ج ن٢ = زاویۂ ا ج ن١ + زاویۂ ن١ ج ن٢

یعنی $طہ_2 = طہ_1 + \frac{\pi}{2}$ ......(۲)

اب مساوات (۱) کی طرح ناقص کی مساوات میں ن٢ کے قطبی محدد بھرتی کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{1}{ر_2^2} = \frac{جم^2 طہ_2}{ا^2} + \frac{جب^2 طہ_2}{ب^2} \quad ......(۳)$$

مساوات (۳) میں مساوات (۲) درج کرنے سے ملتا ہے کہ

$$\frac{1}{ر_2^2} = \frac{جم^2(طہ_1 + \frac{\pi}{2})}{ا^2} + \frac{جب^2(طہ_1 + \frac{\pi}{2})}{ب^2}$$

$$= \frac{جب^2 طہ_1}{ا^2} + \frac{جم^2 طہ_1}{ب^2} \quad ......(۴)$$

مساواتوں (۱) اور (۴) کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{ر_1^2} + \frac{1}{ر_2^2} = \frac{1}{و^2}(\text{جم}^2 ط_1 + \text{جب}^2 ط_1) + \frac{1}{ب^2}(\text{جب}^2 ط_1 + \text{جم}^2 ط_1)$$

$$= \frac{1}{و^2} + \frac{1}{ب^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

مساوات (۵) میں طرفین کو ۴ پر تقسیم کرنے سے ملتا ہے

$$\frac{1}{(2ر_1)^2} + \frac{1}{(2ر_2)^2} = \frac{1}{(2و)^2} + \frac{1}{(2ب)^2} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

جس سے مطلوبہ مسئلہ ثابت ہو جاتا ہے۔

مشق ۲۱

(۱) اُس ناقص کی مساوات معلوم کرو جس کا مرکز مبداء پر محورِ اعظم محور لا کی سمت میں محورِ اصغر محور ما کی سمت میں واقع ہو اور جو نقطوں (۲،۳) اور (۳،۱) میں سے گزرے۔

جواب $۳ لا^2 + ۵ ما^2 = ۳۲$

(۲) اُس ناقص کی مساوات دریافت کرو جس کا ماسکہ نقطہ (۳،۲) مرتب خط ۴ لا + ۳ ما − ۱ = ۰ اور خروج المرکز $\frac{۵}{۶}$ ہے۔

جواب $۲۰ لا^2 - ۲۴ لا ما + ۲۷ ما^2 - ۲۰۸ لا - ۱۳۸ ما + ۴۶۷ = ۰$

(۳) اس ناقص کی مساوات دریافت کرو جس کا مرکز مبداء پر، وترِ خاص کا طول ۸ اور خروج المرکز $\frac{۳}{۵}$ ہے اور محور حوالہ کے محددوں پر ہیں۔

جواب $۱۶ لا^2 + ۲۵ ما^2 = ۶۲۵$

(۴) اُس ناقص کی مساوات دریافت کرو جس کے ماسکے نقاط (۴،۰) اور ([illegible]) ہیں اور جس کا خروج المرکز $\frac{۱}{۳}$ ہے۔

جواب $\frac{لا^2}{۱۴۴} + \frac{ما^2}{۱۲۸} = ۱$

(۵) مساوات ۹ لا۲ + ۵ ما۲ - ۳۰ ما = ۰ سے تعبیر ہونے والے ناقص کا وترِ خاص، خروج المرکز اور ماسکوں کے محدّد معلوم کرو -

جواب ل = ۱۰/۳، ز = ۲/۳، س (۰، ۱)، سَ (۰، ۵)

(۶) مساوات ۲۵ لا۲ + ۱۶۹ ما۲ + ۵۰ لا - ۱۳۵۲ ما - ۱۴۹۶ = ۰ سے تعبیر ہونے والے ناقص کے محوروں کا طول، خروج المرکز، اور ماسکوں کے محدّد معلوم کرو -

جواب ا = ۱۳، ب = ۵، ز = ۱۲/۱۳، س (۱۱، ۴)، سَ (-۱۳، ۴)

(۷) ناقص پر کے نقطۂ ف کے جواب میں امدادی دائرہ پر نقطہ ق ہے نقطۂ ف سے خط ق ج کے متوازی ایک خط کھینچا گیا ہے جو محورِ اعظم سے نقطۂ ل پر اور محورِ اصغر سے نقطۂ م پر ملتا ہے - ثابت کرو کہ

ف ل = ب، ف م = ا

[اشارہ: ف سے محورِ اعظم پر عمود ف ن ڈالو اور خارج المرکز زاویہ ھ کی رقوم میں ف کے محدّدوں کے لیے جو جملے دفعہ (۱۵۱) میں حاصل کیے گئے اُن کو استعمال کرو -]

(۸) ذیل کی مساواتوں سے تعبیر ہونے والے ناقص کے ماسکوں کے محدّد معلوم کرو:

(ا) ۴ لا۲ + ۷ ما۲ - ۱۲ = ۰؛ (ب) ۱۶ لا۲ + ۲۵ ما۲ = ۴۰۰
(ج) ۴ لا۲ + ۲۵ ما۲ - ۱۰۰ = ۰

جواب (ا) (۳/√۲۸، ۰)، (-۳/√۲۸، ۰)؛ (ب) (۳، ۰)، (-۳، ۰)
(ج) (√۲۱، ۰)، (-√۲۱، ۰)

(۹) اُس ناقص کی مساوات معلوم کرو جس کے ماسکوں کے محدّد (۰، ۰) اور (۳، ۰) ہیں، اور جس کے محورِ اعظم کا طول ۱۲ ہے -

جواب ۶۰ لا۲ + ۶۴ ما۲ - ۱۸۰ لا - ۲۰۲۵ = ۰

(۱۰) اُس ناقص کی مساوات معلوم کرو جس کے ماسکوں کے محدّد (-۲، ۱) اور (۳، ۵) ہیں اور جس کے محورِ اعظم کا طول ۷ ہے - جواب (لا - ۱)۲/۴۹ + (ما - ۴/۳)۲/۲۴ = ۱

(۱۱) ناقص $لا^2 + 9 ما^2 = 9$ کے وترِ خاص کا طول معلوم کرو۔

جواب $\frac{2}{3}$

(۱۲) اُس ناقص کی مساوات معلوم کرو جس کا راس (۳، ۰) اور ماسکہ (۲، ۰) ہے۔

جواب $9 لا^2 + 5 ما^2 = 45$

(۱۳) اُس ناقص کی مساوات معلوم کرو جس کا خروج المرکز $\frac{1}{2}$ اور راس (۶، ۰) ہے۔

جواب $27 لا^2 + 36 ما^2 = 972$

(۱۴) اُس ناقص کی مساوات معلوم کرو جس کا وترِ خاص ۱۰ اور خروج المرکز $\frac{2}{3}$ ہے۔

جواب $45 لا^2 + 81 ما^2 = 3645$

(۱۵) اُس ناقص کی مساوات معلوم کرو جس کا مرکز (۱، ۲) محورِ اعظم کا طول ۱۰ اور محورِ اصغر کا طول ۶ ہے۔

جواب $\frac{(لا-1)^2}{100} + \frac{(ما-2)^2}{36} = 1$

۵،۶۔ناقص کے وتر کی مساوات۔

فرض کرو کہ ناقص پر کوئی دو نقطے ف اور ق ہیں جن کے محدّد بالترتیب $(لا_1، ما_1)$ اور $(لا_2، ما_2)$۔ چونکہ یہ دونوں نقطے ناقص پر واقع ہیں اس لیے

$$\frac{لا_1^2}{و^2} + \frac{ما_1^2}{ب^2} = 1$$

$$\frac{لا_2^2}{و^2} + \frac{ما_2^2}{ب^2} = 1$$

دوسری مساوات کو پہلی میں سے تفریق کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{\text{و}^2}\left(\text{لا}_1^2 - \text{لا}_2^2\right) = -\frac{1}{\text{ب}^2}\left(\text{ما}_1^2 - \text{ما}_2^2\right)$$

اس لیے

$$\frac{\text{لا}_1 - \text{لا}_2}{\text{ما}_1 - \text{ما}_2} = -\frac{\text{و}^2}{\text{ب}^2}\cdot\frac{\text{ما}_1 + \text{ما}_2}{\text{لا}_1 + \text{لا}_2} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

اب ہم کو معلوم ہے کہ کسی دو نقطوں (لا₁، ما₁) اور (لا₂، ما₂) کو ملانے والے خط کی مساوات حسبِ ذیل ہوتی ہے

$$\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{لا}_2 - \text{لا}_1} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{ما}_2 - \text{ما}_1}$$

یعنی

$$\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{ما} - \text{ما}_1} = \frac{\text{لا}_2 - \text{لا}_1}{\text{ما}_2 - \text{ما}_1} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

مساوات (۱) سے $\frac{\text{لا}_2 - \text{لا}_1}{\text{ما}_2 - \text{ما}_1}$ کی قیمت مساوات (۲) میں درج کرنے پر حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{ما} - \text{ما}_1} = -\frac{\text{و}^2}{\text{ب}^2}\cdot\frac{\text{ما}_1 + \text{ما}_2}{\text{لا}_1 + \text{لا}_2} \quad \ldots\ldots (۳)$$

یا

$$\text{ب}^2(\text{لا} - \text{لا}_1)(\text{لا}_1 + \text{لا}_2) + \text{و}^2(\text{ما} - \text{ما}_1)(\text{ما}_1 + \text{ما}_2) = 0 \quad \ldots\ldots (۴)$$

مساواتوں (۳) اور (۴) میں سے کسی ایک کو ہم ناقص کے وتر ف ق کی مساوات لے سکتے ہیں۔

۵۱۶۔ ناقص پر کے کسی نقطہ سے ناقص کے مماس کی مساوات۔

وتر ف ق کے لیے گذشتہ دفعہ میں جو مساوات حاصل کی گئی ہے اُس سے ہم حسبِ معمول فوراً مماس کی مساوات حاصل کر سکتے ہیں۔

وتر ف ق کی مساوات (۴) دفعہ (۵۶) صحیح ہے خواہ نقاط ف اور ق ناقص پر کہیں واقع ہوں۔ فرض کرو کہ نقطۂ ف ثابت رہتا ہے اور نقطۂ ق ناقص پر حرکت کرتے ہوئے نقطۂ ف کے قریب آتا ہے۔ انتہا میں جبکہ نقطۂ ق نقطۂ ف پر عین منطبق ہونے کو ہو ہمیں نقطۂ ف پر کا مماس حاصل ہوگا اور ظاہر ہے کہ اس وقت مساوات (۴) دفعہ (۵۶) میں

$$\text{لا}_2 = \text{لا}_1 \quad \text{اور} \quad \text{ما}_2 = \text{ما}_1$$

رکھنا چاہیے۔ پس نقطۂ ف پر کے مماس کی مساوات حسبِ ذیل حاصل ہوتی ہے:۔

$$\text{ب}^2(\text{لا}-\text{لا}_1)(2\,\text{لا}_1) + \text{ل}^2(\text{ما}-\text{ما}_1)(2\,\text{ما}_1) = 0$$

یا ۲ ل۲ ب۲ پر تقسیم کرنے سے مساوات ہو جاتی ہے

$$\frac{\text{لا}_1(\text{لا}-\text{لا}_1)}{\text{ل}^2} + \frac{\text{ما}_1(\text{ما}-\text{ما}_1)}{\text{ب}^2} = 0$$

یا مختلف ترتیب دینے سے ملتا ہے

$$\frac{\text{لا}\,\text{لا}_1}{\text{ل}^2} + \frac{\text{ما}\,\text{ما}_1}{\text{ب}^2} = \frac{\text{لا}_1^2}{\text{ل}^2} + \frac{\text{ما}_1^2}{\text{ب}^2} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

لیکن چونکہ نقطۂ ف ناقص پر واقع ہے اس لیے اس کے محدد (لا۱، ما۱) ناقص کی مساوات کو پورا کریںگے

$$\frac{\text{لا}_1^2}{\text{ل}^2} + \frac{\text{ما}_1^2}{\text{ب}^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

مساوات (۲) کو مساوات (۱) میں درج کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{لا}\,\text{لا}_1}{\text{ل}^2} + \frac{\text{ما}\,\text{ما}_1}{\text{ب}^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

یہی ناقص کے مماس کی مطلوبہ مساوات ہے جو معیاری شکل میں ہے۔
ہم دیکھتے ہیں کہ مماس کی مساوات ناقص کی مساوات سے اسی

قاعدہ کی بناء پر لکھی جا سکتی ہے کہ لا² کی بجائے لا لا′، ما² کی بجائے ما ما′، ۲ لا کی بجائے لا + لا′ اور ۲ ما کی بجائے ما + ما′ رکھ دیا جائے۔ یہ قاعدہ مماس کی مساوات کو یاد رکھنے کے لیے بہت مفید ہے اور دوسرے درجہ کی ہر مساوات کے لیے صحیح ہے۔

۵،۶۲۔ عماد کی مساوات۔

مماس کی مساوات حاصل ہو جانے کے بعد عماد کی مساوات حاصل کرنے میں کوئی دشواری نہیں ہے۔ فرض کرو کہ ہم نقطہ ف پر جس کے محدّد (لا′، ما′) ہیں عماد کی مساوات دریافت کرنا چاہتے ہیں۔ نیز فرض کرو کہ نقطۂ ف پر کا عماد محور لا سے زاویۂ طہ اور نقطۂ ف پر کا مماس محور لا سے زاویۂ طَہ بناتا ہے۔ گذشتہ دفعہ میں حاصل کی ہوئی مماس کی مساوات (۳) کو اس طرح لکھ سکتے ہیں:

ما = (ب² / ما′) (۱ − لا لا′ / ا²) ....(۱)

خطِ مستقیم کے بیان سے ہم کو معلوم ہے اگر خط (۱) محور لا سے زاویۂ طَہ بنائے تو

مس طَہ = − ب² لا′ / ا² ما′ ....(۲)

لیکن چونکہ عماد مماس پر علی القوائم ہوتا ہے اس لیے

مس طہ = − ۱ / مس طَہ = ا² ما′ / ب² لا′ ....(۳)

اب عماد چونکہ نقطۂ (لا′، ما′) میں سے گزرتا ہے اس لیے اس کی مساوات فوراً حاصل ہوتی ہے

ما − ما′ = مس طہ (لا − لا′) = (ا² ما′ / ب² لا′) (لا − لا′)

یعنی

$$\text{ب}^2\,\text{لا}_1\,(\text{ما}-\text{ما}_1)=\text{ل}^2\,\text{ما}_1\,(\text{لا}-\text{لا}_1)\quad\ldots\ldots\ldots(۴)$$

یا

$$\frac{(\text{لا}-\text{لا}_1)}{\frac{\text{لا}_1}{\text{ل}^2}}=\frac{(\text{ما}-\text{ما}_1)}{\frac{\text{ما}_1}{\text{ب}^2}}$$

جو عماد کی مطلوبہ مساوات ہے۔

مثال (۱) مساوات $\text{ل}\,\text{لا}^2+\text{ب}\,\text{ما}^2+۲\text{گ}\,\text{لا}+۲\text{ف}\,\text{ما}+\text{ج}=۰$
ایک ناقص کو تعبیر کرتی ہے۔ اس پر کے کسی نقطہ ف $(\text{لا}_1،\text{ما}_1)$ پر کے مماس کی مساوات دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ناقص پر ایک اور نقطہ ق $(\text{لا}_2،\text{ما}_2)$ ہے۔ تو

$$\text{ل}\,\text{لا}_2^2+\text{ب}\,\text{ما}_2^2+۲\text{گ}\,\text{لا}_2+۲\text{ف}\,\text{ما}_2+\text{ج}=۰$$

$$\text{ل}\,\text{لا}_1^2+\text{ب}\,\text{ما}_1^2+۲\text{گ}\,\text{لا}_1+۲\text{ف}\,\text{ما}_1+\text{ج}=۰$$

تفریق کرنے سے

$$\text{ل}(\text{لا}_2^2-\text{لا}_1^2)+\text{ب}(\text{ما}_2^2-\text{ما}_1^2)+۲\text{گ}(\text{لا}_2-\text{لا}_1)+۲\text{ف}(\text{ما}_2-\text{ما}_1)=۰$$

یعنی

$$(\text{لا}_2-\text{لا}_1)\left\{\text{ل}(\text{لا}_2+\text{لا}_1)+۲\text{گ}\right\}+(\text{ما}_2-\text{ما}_1)\left\{\text{ب}(\text{ما}_2+\text{ما}_1)+۲\text{ف}\right\}=۰$$

یعنی

$$\frac{\text{لا}_2-\text{لا}_1}{\text{ما}_2-\text{ما}_1}=-\frac{\text{ب}(\text{ما}_2+\text{ما}_1)+۲\text{ف}}{\text{ل}(\text{لا}_2+\text{لا}_1)+۲\text{گ}}\quad\ldots\ldots(۱)$$

پس وتر فق کی مساوات ہوگی

$$\frac{\text{لا}-\text{لا}_1}{\text{ما}-\text{ما}_1}=\frac{\text{لا}_2-\text{لا}_1}{\text{ما}_2-\text{ما}_1}=-\frac{\text{ب}(\text{ما}_2+\text{ما}_1)+۲\text{ف}}{\text{ل}(\text{لا}_2+\text{لا}_1)+۲\text{گ}}\quad\ldots\ldots(۲)$$

نقطۂ ف پر کے مماس کی مساوات حاصل کرنے کے لیے مساوات (۲) میں
$\text{لا}_2=\text{لا}_1$ اور $\text{ما}_2=\text{ما}_1$ رکھنا چاہیے جس سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{لا} - \text{لا}_{\text{ا}}}{\text{ما} - \text{ما}_{\text{ا}}} = -\frac{\text{۲ب ما}_{\text{ا}} + \text{۲ف}}{\text{۲ک لا}_{\text{ا}} + \text{۲گ}} = -\frac{\text{ب ما}_{\text{ا}} + \text{ف}}{\text{ک لا}_{\text{ا}} + \text{گ}}$$

یعنی $(\text{ک لا}_{\text{ا}} + \text{گ})(\text{لا} - \text{لا}_{\text{ا}}) + (\text{ب ما}_{\text{ا}} + \text{ف})(\text{ما} - \text{ما}_{\text{ا}}) = ۰$

یعنی پھیلانے اور منتقل کرنے پر ملتا ہے کہ

$$\text{ک لا لا}_{\text{ا}} + \text{ب ما ما}_{\text{ا}} + \text{گ لا} + \text{ف ما} = \text{ک لا}_{\text{ا}}^{۲} + \text{ب ما}_{\text{ا}}^{۲} + \text{گ لا}_{\text{ا}} + \text{ف ما}_{\text{ا}} \quad \ldots\ldots (۳)$$

لیکن چونکہ نقطۂ (لا$_{\text{ا}}$، ما$_{\text{ا}}$) ناقص پر واقع ہے اس لیے

$$\text{ک لا}_{\text{ا}}^{۲} + \text{ب ما}_{\text{ا}}^{۲} + \text{۲گ لا}_{\text{ا}} + \text{۲ف ما}_{\text{ا}} + \text{ج} = ۰$$

یعنی $\text{ک لا}_{\text{ا}}^{۲} + \text{ب ما}_{\text{ا}}^{۲} + \text{گ لا}_{\text{ا}} + \text{ف ما}_{\text{ا}} = -(\text{گ لا}_{\text{ا}} + \text{ف ما}_{\text{ا}} + \text{ج}) \quad \ldots (۴)$

مساواتوں (۳) اور (۴) سے ملتا ہے

$$\text{ک لا لا}_{\text{ا}} + \text{ب ما ما}_{\text{ا}} + \text{گ لا} + \text{ف ما} = -(\text{گ لا}_{\text{ا}} + \text{ف ما}_{\text{ا}} + \text{ج})$$

یعنی منتقل کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$\text{ک لا لا}_{\text{ا}} + \text{ب ما ما}_{\text{ا}} + \text{گ}(\text{لا} + \text{لا}_{\text{ا}}) + \text{ف}(\text{ما} + \text{ما}_{\text{ا}}) + \text{ج} = ۰$$

جو نقطۂ (لا$_{\text{ا}}$، ما$_{\text{ا}}$) پر کے مماس کی مساوات ہے اور دفعہ (۱[illegible]۵) میں بیان کیے ہوئے قاعدہ کے موافق ہے۔

مشق ۲۲

(۱) ثابت کرو کہ ناقص کے کسی قطر پر کے سروں کے مماس متوازی ہوتے ہیں۔

(۲) ناقص $\text{لا}^{۲} + \text{۱۶ ما}^{۲} = ۱۶$ کے ان مماسوں کی مساواتیں دریافت کرو جو محور لا سے ۶۰° کا زاویہ بناتے ہیں۔

جواب $\text{ما} = \sqrt{۳}\ \text{لا} + \sqrt{۱۳}$، $\text{ما} = \sqrt{۳}\ \text{لا} - \sqrt{۱۳}$

(۳) ثابت کرو کہ ان تمام ناقصوں کے، جن کے محورِ اعظم ایک ہی ہوں، اُن نقطوں پر کے مماس جن کا فصلہ دیا ہوا ہو محور لا کو ایک ہی نقطہ پر قطع کرتے ہیں۔ اس طرح سے معلوم کرو کہ ایک دائرہ کے مماس کی مدد سے ایک ناقص کا مماس کس طرح کھینچا جا سکتا ہے بشرطیکہ نقطۂ تماس ن دیا ہوا ہو۔

[نصف محورِ اعظم کے نصف قطر والا ایک دائرہ کھینچو اور دائرہ پر وہ نقطہ دریافت کرو جس کا فصلہ نقطۂ تماس ن کے فصلہ کے مساوی ہو۔ اس نقطہ پر دائرہ کا مماس کھینچو جو فرض کرو کہ محور لا سے ت پر ملتا ہے۔ ت ن ناقص کا مطلوبہ مماس ہوگا]۔

(۴) ناقص ۹ لا^۲ + ۲۵ ما^۲ + ۵۴ لا − ۲۰۰ ما − ۸۷۳ = ۰ کے نقطۂ (۹،۶) پر کے مماس اور عماد کی مساواتیں معلوم کرو۔

جواب مماس ۸۱ لا + ۱۲۵ ما − ۱۶۱۱ = ۰، عماد ۱۲۵ لا − ۸۱ ما − ۲۱ = ۰۔

(۵) ناقص ۹ لا^۲ + ۱۶ ما^۲ + ۳۶ لا − ۱۲۸ ما + ۱۴۸ = ۰ کے نقطوں (ا) (−۲، ۷)، (ب) (۲، ۴)، (ج) (−۲، ۱) اور (د) (−۶، ۴) پر کے مماسوں اور عمادوں کی مساواتیں دریافت کرو۔

جواب (ا) ما − ۷ = ۰، لا + ۲ = ۰۔ (ب) لا − ۲ = ۰، ما − ۴ = ۰۔ (ج) ما − ۱ = ۰، لا + ۲ = ۰، (د) لا + ۶ = ۰، ما − ۴ = ۰۔

(۶) ناقص ۱۶ لا^۲ + ۲۵ ما^۲ − ۹۶ لا − ۲۰۰ ما + ۱۴۴ = ۰ کے نقطوں (ا) (−۲، ۴) اور (ب) (۳، ۰) پر کے مماسوں اور عمادوں کی مساواتیں دریافت کرو۔

جواب (ا) لا + ۲ = ۰، ما − ۴ = ۰، (ب) ما = ۰، لا − ۳ = ۰۔

(۷) ناقص ۲ لا^۲ + ما^۲ − ۱۶ لا − ۴ ما = ۰ کے نقطہ (۸، ۴) پر کے مماس اور عماد کی مساواتیں دریافت کرو۔

جواب ۴ لا + ما − ۳۶ = ۰، لا − ۴ ما + ۸ = ۰۔

۵۷ - ناقص اور خطِ مستقیم کا تقاطع -

فرض کرو کہ ناقص کی مساوات

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ہے اور دیا ہوا خطِ مستقیم

$$\text{ما} = \text{م}\,\text{لا} + \text{ج} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

سے تعبیر ہوتا ہے۔ ہم اوپر اکثر بیان کر چکے ہیں کہ کسی دو منحنیوں کے نقاطِ تقاطع کو دریافت کرنے کے لیے دونوں کی مساواتوں کو ایک ساتھ حل کر کے لا اور ما کی قیمتوں کو حاصل کرنا چاہیے۔ پس (۲) سے ما کی قیمت (۱) میں درج کرنے پر ملتا ہے:

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{(\text{م}\,\text{لا} + \text{ج})^2}{\text{ب}^2} = 1$$

یعنے پھیلانے اور ترتیب دینے پر

$$\text{ب}^2\,\text{لا}^2 + \text{ا}^2\,(\text{م}\,\text{لا} + \text{ج})^2 - \text{ا}^2\,\text{ب}^2 = 0$$

$$\text{یعنے}\quad \text{لا}^2\,(\text{ا}^2\text{م}^2 + \text{ب}^2) + 2\,\text{ا}^2\text{م}\,\text{ج}\,\text{لا} + \text{ا}^2\,(\text{ج}^2 - \text{ب}^2) = 0 \quad \ldots\ldots (3)$$

لا میں یہ ایک دوسرے درجہ کی مساوات ہے اور اس سے ہم کو عام طور پر لا کی دو قیمتیں لا_1 اور لا_2 ملتی ہیں جن کو ہم چاہیں تو فوراً لکھ سکتے ہیں۔ پھر ان کے جواب میں ما کی دو قیمتیں حسبِ ذیل حاصل ہوتی ہیں:

$$\text{ما}_1 = \text{م}\,\text{لا}_1 + \text{ج}$$

اور

$$\text{ما}_2 = \text{م}\,\text{لا}_2 + \text{ج}\,.$$

اس طرح دو نقاطِ تقاطع $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ اور $(\text{لا}_2، \text{ما}_2)$ مل جاتے ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ ایک خطِ مستقیم ایک ناقص کو دو اور صرف دو نقطوں پر قطع کرتا ہے۔

اب جبر و مقابلہ سے ہم کو معلوم ہے کہ مساوات (۳) کی دونوں اصلیں حقیقی ہونگی، یا منطبق ہونگی، یا خیالی ہونگی بموجب اس کے کہ جملہ

$$(۲\,لا^{۲}\,م\,ج)^{۲} - ۴\,(ب^{۲} + لا^{۲}\,م^{۲}) \times لا^{۲}\,(ج^{۲} - ب^{۲}) \quad \ldots\ldots (۵)$$

کی قیمت مثبت ہو یا صفر ہو یا منفی ہو۔ پہلی صورت میں خطِ مستقیم ناقص کا وتر ہوگا، دوسری صورت میں خط ناقص کا مماس ہوگا اور تیسری صورت میں وہ ناقص کے بالکل باہر واقع ہوگا۔

جملہ (۵) کو ۴ پر تقسیم کرنے اور پھیلا کر سادہ شکل میں تحویل کرنے پر

$$ب^{۲}\,(ب^{۲} + لا^{۲}\,م^{۲}) - ب^{۲}\,ج^{۲}$$

ملتا ہے اور پھر اس جملہ کو $ب^{۲}$ پر تقسیم کریں تو

$$ب^{۲} + لا^{۲}\,م^{۲} - ج^{۲} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۶)$$

حاصل ہوتا ہے۔ تو گویا نقاطِ تقاطع کا حقیقی، منطبق یا خیالی ہونا اس پر منحصر ہے کہ جملہ (۶) کی قیمت مثبت، صفر یا منفی ہو یعنی اس پر منحصر ہے کہ

$$ج^{۲} \lesseqgtr ب^{۲} + لا^{۲}\,م^{۲} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۷)$$

اب اگر م کو مستقل کر دیا جائے یعنی خط ایک دی ہوئی سمت میں کھینچا جائے تو یہ ناقص کو اس وقت مس کریگا جبکہ

$$ج^{۲} = ب^{۲} + لا^{۲}\,م^{۲} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۸)$$

یعنی

$$ج = +\sqrt{ب^{۲} + لا^{۲}\,م^{۲}} \; یا \; -\sqrt{ب^{۲} + لا^{۲}\,م^{۲}} \quad \ldots\ldots (۹)$$

اس طرح ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ ایک دی ہوئی سمت ط میں کھینچے ہوئے بے شمار متوازی خطوں میں سے صرف وہ خط، ناقص کو مس کرتے ہیں جن کی مساواتیں حسبِ ذیل ہیں:-

$$ی = لا\,مس\,ط + \sqrt{لا^{۲}\,مس^{۲}\,ط + ب^{۲}} \quad \ldots\ldots (۱۰)$$

اور

ا = لا مس ط - √(ا^۲ مس^۲ ط + ب^۲) ...... (۱۱)

جہاں مس ط = م

اس میں زاویۂ ط کی قیمت کے متعلق ہم نے کوئی تخصیص نہیں کی ہے اور خواہ ط کی قیمت کچھ ہی لی جائے خطوط (۱۰) اور (۱۱) ناقص کو ضرور مس کرینگے -

۱۷ء۵ - اُوپر کی دفعہ میں ناقص کے مماس کے لیے جو مساوات شکل

ا = م لا + √(ا^۲ م^۲ + ب^۲)

میں ملی ہے اس کو ہم دفعہ (۱۶ء۵) کی مساوات کی مدد سے بھی حاصل کر سکتے ہیں۔ اس میں یہ فائدہ ہے کہ اس سے نقطۂ تماس کے محدد بھی بآسانی مل جاتے ہیں۔

ہم کو معلوم ہے کہ ناقص پر کے نقطۂ (لاَ، اَ) پر کے مماس کی مساوات حسبِ ذیل ہے :-

$$\frac{\text{لا لاَ}}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ا اَ}}{\text{ب}^2} = ۱$$

یعنے اس کو دوسری طرح ترتیب دینے سے نقطۂ (لاَ، اَ) پر کی مساوات ملتی ہے

$$\text{ا} = -\frac{\text{ب}^2 \text{لاَ}}{\text{ا}^2 \text{اَ}}\ \text{لا} + \frac{\text{ب}^2}{\text{اَ}} \quad ....\ (۱)$$

فرض کرو کہ $-\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}\ \frac{\text{لاَ}}{\text{اَ}} = \text{م}$ .... (۲)

اب ہمیں مساوات (۱) میں کی مستقل رقم $\frac{\text{ب}^2}{\text{اَ}}$ کی قیمت م کی رقوم میں معلوم کرنا ہے -

مساوات (۲) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ب}^2}{\text{اَ}} = -\frac{\text{ا}^2 \text{م}}{\text{لاَ}}$$

یعنے

$$\frac{ب^2}{ماَ^2} = \frac{م^2 ل^2}{لاَ^2} \quad \text{.................(۳)}$$

لیکن چونکہ نقطۂ (لاَ، ماَ) ناقص پر واقع ہے اس لیے

$$\frac{لاَ^2}{ل^2} + \frac{ماَ^2}{ب^2} = 1$$

یعنے

$$\frac{لاَ^2}{ل^2} = 1 - \frac{ماَ^2}{ب^2} = \frac{ب^2 - ماَ^2}{ب^2}$$

پس

$$\frac{1}{لاَ^2} = \frac{ب^2}{ل^2(ب^2 - ماَ^2)} \quad \text{.................(۴)}$$

مساوات (۴) سے $\frac{1}{لاَ^2}$ کی قیمت مساوات (۳) میں رکھنے پر حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ب^2}{ماَ^2} = م^2 ل^2 \cdot \frac{ب^2}{ل^2(ب^2 - ماَ^2)} = \frac{ل^2 م^2 ب^2}{ب^2 - ماَ^2}$$

ضرب چلیپائی دینے اور مختلف ترتیب دینے سے ملتا ہے

$$ماَ^2(ل^2 م^2 + ب^2) = ب^4$$

یعنے

$$\frac{ب^4}{ماَ^2} = ل^2 م^2 + ب^2$$

اس لیے

$$\frac{ب^2}{ماَ} = \pm\sqrt{ل^2 م^2 + ب^2} \quad \text{.................(۵)}$$

مماس کی مساوات (۱) میں قیمتیں (۲) اور (۵) رکھنے سے یہ مساوات ہو جاتی ہے

$$ما = م لا \pm \sqrt{ل^2 م^2 + ب^2}$$

جو مطلوبہ مساوات ہے۔ مساوات (۵) سے ملتا ہے

$$ماَ = \pm \frac{ب^2}{\sqrt{ل^2 م^2 + ب^2}} \quad \text{.................(۶)}$$

اور پھر مساوات (۲) میں یہ قیمت درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لاَ} = -\frac{\text{م اُ}^{2}}{\text{ب}^{2}}\,\text{ماَ}$$

$$= \pm\frac{\text{م اُ}^{2}}{\sqrt{\text{اُ}^{2}\text{م}^{2}+\text{ب}^{2}}} \quad \text{..........(۷)}$$

پس معلوم ہوا کہ مماس $\text{ما} = \text{م لا} + \sqrt{\text{اُ}^{2}\text{م}^{2}+\text{ب}^{2}}$ کا نقطۂ تماس

$$\left(\frac{-\text{م اُ}^{2}}{\sqrt{\text{اُ}^{2}\text{م}^{2}+\text{ب}^{2}}} ، \frac{\text{ب}^{2}}{\sqrt{\text{اُ}^{2}\text{م}^{2}+\text{ب}^{2}}}\right) \quad \text{........(۸)}$$

ہے اور مماس $\text{ما} = \text{م لا} - \sqrt{\text{اُ}^{2}\text{م}^{2}+\text{ب}^{2}}$ کا نقطۂ تماس

$$\left(\frac{\text{م اُ}^{2}}{\sqrt{\text{اُ}^{2}\text{م}^{2}+\text{ب}^{2}}} ، \frac{-\text{ب}^{2}}{\sqrt{\text{اُ}^{2}\text{م}^{2}+\text{ب}^{2}}}\right) \quad \text{........(۹)}$$

مثال (۱) ثابت کرو کہ خط

$$\text{لا جم عہ} + \text{ما جب عہ} = \text{ع} \quad \text{..........(۱)}$$

ناقص کو مس کرتا ہے اگر $\text{ع}^{2} = \text{اُ}^{2}\,\text{جم}^{2}\,\text{عہ} + \text{ب}^{2}\,\text{جب}^{2}\,\text{عہ}$

خط مستقیم کی مساوات (۱) کو اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں

$$\text{ما} = \frac{\text{ع} - \text{لا جم عہ}}{\text{جب عہ}} \quad \text{..........(۲)}$$

ما کی قیمت (۲) کو ناقص کی مساوات میں درج کرنے پر ملتا ہے

$$\frac{\text{لا}^{2}}{\text{اُ}^{2}} + \frac{(\text{ع} - \text{لا جم عہ})^{2}}{\text{ب}^{2}\,\text{جب}^{2}\,\text{عہ}} = ۱$$

یعنی $\text{لا}^{2}\,\text{ب}^{2}\,\text{جب}^{2}\,\text{عہ} + \text{اُ}^{2}(\text{ع} - \text{لا جم عہ})^{2} - \text{اُ}^{2}\,\text{ب}^{2}\,\text{جب}^{2}\,\text{عہ} = ۰$

یعنی $\text{لا}^{2}(\text{اُ}^{2}\,\text{جم}^{2}\,\text{عہ} + \text{ب}^{2}\,\text{جب}^{2}\,\text{عہ}) - ۲\,\text{ع اُ}^{2}\,\text{جم عہ لا} + \text{اُ}^{2}(\text{ع}^{2} - \text{ب}^{2}\,\text{جب}^{2}\,\text{عہ}) = ۰$ (۳)

خطِ مستقیم (۱) ناقص کا مماس ہوگا اگر مساوات (۳) میں لا کی دونوں قیمتیں مساوی ہوں یعنی اگر

لا۲ (ل۲ جم۲ عہ + ب۲ جب۲ عہ) (ع۲ - ب۲ جب۲ عہ) = ع۲ لا۲ جم۲ عہ

یعنے اگر - لا۲ ب۲ جم۲ عہ جب۲ عہ + لا۲ ب۲ جب۲ عہ - ع۲ - لا۲ ب۲ جب۲ عہ =

یعنے اگر ع۲ = لا۲ جم۲ عہ + ب۲ جب۲ عہ ....(۴)

مثال (۲) ثابت کرو کہ خطِ مستقیم

ل لا + م ما = ن ....(۵)

ناقص کو مس کریگا اگر لا۲ ل۲ + ب۲ م۲ = ن۲

مساوات (۱) سے ملتا ہے

$$\text{ما} = \frac{\text{ن} - \text{ل لا}}{\text{م}} \quad ....(6)$$

مساوات (۶) سے ما کی قیمت کو ناقص کی مساوات میں درج کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{لا}^2} + \frac{(\text{ن} - \text{ل لا})^2}{\text{ب}^2\text{م}^2} = 1$$

یعنے پھیلانے اور ترتیب دینے پر

لا۲ (لا۲ ل۲ + ب۲ م۲) - ۲ لا۲ ن ل لا + لا۲ (ن۲ - ب۲ م۲) = ۰ ......(۷)

دیا ہوا خط (۵) ناقص کو مس کریگا اگر

(لا۲ ل۲ + ب۲ م۲) × لا۲ (ن۲ - ب۲ م۲) = لا۴ ن۲ ل۲

اس کو پھیلانے اور مختصر کرنے پر مطلوبہ شرط حاصل ہو جاتی ہے۔

مشق ۲۳

(۱) معلوم کرو کہ نقاط (۰۹، ۰۹۰) اور (۳، ۱ء۳، ۴ء۰)

ناقص ۲ لا۲ + ۳ ما۲ = ۳ کے اندر ہیں پایا ہے۔

(۳) معلوم کرو کہ ت کی کن قیمتوں کے لیے خطِ مستقیم لا = ۱ - ت، ما = ت ۲ پر کے نقطے ناقص لا۲/۹ + ما۲/۴ = ۱ کے اندر واقع ہونگے۔

جواب: ت = -۱ سے لے کر ت = ۵/۱۳ تک۔

(۳) ثابت کرو کہ خطِ مستقیم ۳ لا + ۳ ما = ۱۱ ناقص ۲ لا۲ + ۳ ما۲ = ۱۱ کا ایک مماس ہے۔ نقطۂ تماس کے محدد بھی دریافت کرو۔

جواب (۲، ۱)

(۴) ثابت کرو کہ خطِ مستقیم ل لا + م ما + ن = ۰ ناقص لا۲/ا۲ + ما۲/ب۲ = ۱ کو جن نقطوں پر قطع کرتا ہے ان پر ناقص کے مماسوں کی مشترکہ مساوات حسبِ ذیل ہے،

(ل لا + م ما + ن)۲ = (لا۲/ا۲ + ما۲/ب۲ - ۱) (ا۲ ل۲ + ب۲ م۲ - ن۲)

(۵) خطوطِ مستقیم (ا) ۲ لا - ۳ ما + ۱۵ = ۰، (ب) ۲ لا + ۳ ما + ۲ = ۰، (ج) ۲ لا - ما + ۱۰ = ۰ ناقص لا۲/۹ + ما۲/۴ = ۲۵ کو جن وتروں میں قطع کرتے ہیں ان کے نقاطِ تنصیف کے محدد معلوم کرو۔

جواب (ا) (-۳۰، ۱۰)، (ب) (-۳/۲، -۲)، (ج) (-۹/۲، ۱)

(۶) ناقص ۴ لا۲ + ۵ ما۲ = ۲۰ کے وتر لا + ۲ ما = ۱ کا نقطۂ وسطی دریافت کرو۔

جواب: (۵/۲۱، ۸/۲۱)

(۷) ثابت کرو کہ خطِ مستقیم ل لا + م ما + ن = ۰ ناقص لا۲/ا۲ + ما۲/ب۲ = ۱ کو جس وتر پر قطع کرتا ہے اس کے نقطۂ تنصیف کے محدد (ا۲ ل ن / (ا۲ ل۲ + ب۲ م۲)، ب۲ م ن / (ا۲ ل۲ + ب۲ م۲)) ہیں۔

۸۰۵ وترِ تماس کی مساوات

فرض کرو کہ کوئی نقطہ ن جس کے محدد (لا، ما) ہیں ناقص کے باہر واقع ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ بیرونی نقطہ سے ناقص کے دو مماس کھینچے جاسکتے ہیں۔

فرض کرو کہ یہ مماس کو نقاط ف اور ق پر ملتے ہیں جن کے محدّد بالترتیب (لاَ ، ماَ) اور (لاً ، ماً) ہیں ۔
ہم چاہتے ہیں کہ وترِ ف ق کی مساوات دریافت کریں ۔
نقطۂ ف (لاَ ، ماَ) پر کے مماس ف ن کی مساوات ہے

$$\frac{\text{لا لاَ}}{\text{و}^2} + \frac{\text{ما ماَ}}{\text{ب}^2} = ۱$$

لیکن چونکہ یہ مماس نقطۂ ن (لا۱ ، ما۱) میں سے بھی گزرتا ہے اس لیے

$$\frac{\text{لا}_1\text{ لاَ}}{\text{و}^2} + \frac{\text{ما}_1\text{ ماَ}}{\text{ب}^2} = ۱ \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

اسی طرح نقطۂ ق (لاً ، ماً) پر کے مماس ق ن کی مساوات ہے

$$\frac{\text{لا لاً}}{\text{و}^2} + \frac{\text{ما ماً}}{\text{ب}^2} = ۱$$

اور چونکہ یہ مماس بھی نقطۂ ن (لا۱ ، ما۱) میں سے گزرتا ہے اس لیے

$$\frac{\text{لا}_1\text{ لاً}}{\text{و}^2} + \frac{\text{ما}_1\text{ ماً}}{\text{ب}^2} = ۱ \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

اب مساوات

$$\frac{\text{لا}_1\text{ لا}}{\text{و}^2} + \frac{\text{ما}_1\text{ ما}}{\text{ب}^2} = ۱ \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

پر غور کرو ۔ یہ ایک خطِ مستقیم کی مساوات ہے جس کو (لاَ ، ماَ) اور (لاً ، ماً) پورا کرتے ہیں ۔ یعنے خطِ مستقیم (۳) نقطوں ف اور ق میں سے گزرتا ہے جن کا وتر تماس ہے ۔
پس نقطۂ (لا۱ ، ما۱) کے وترِ تماس کی مطلوبہ مساوات (۳) ہے ۔

۱۸۱ ۔ قطب اور قطبی :۔ دائرہ کے بیان

دفعہ (۳۷) میں ہم قطب اور قطبی کی تعریف بتا چکے ہیں ۔ اس کے

مماثل تعریف کو ہم مکافی، ناقص اور زائد کے لیے اختیار کرتے ہیں گویا ناقص کے لیے قطبی کی تعریف حسب ذیل ہو گی :-

اگر ناقص کے اندرونی یا بیرونی کسی نقطہ ن سے کوئی خطِ مستقیم کھینچا جائے جو ناقص کو نقطوں ف اور ق پر قطع کرے تو ف اور ق پر کے مماسوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق " ن کا قطبی بلحاظِ ناقص " کہلاتا ہے۔ نقطۂ ن کو قطب کہتے ہیں۔

۸۲۵ - قطبی کی مساوات

یہ مساوات بھی بعینہٖ اُسی طریقہ سے حاصل کی جاتی ہے جو دائرہ کی شکل میں اختیار کیا گیا تھا۔

فرض کرو کہ ن کے محدد (لا، ما) ہیں اور فرض کرو کہ ن میں سے گزرتا ہوا کوئی وتر کھینچا گیا ہے جو ناقص کو نقاط ف اور ق پر ملتا ہے۔ نیز فرض کرو کہ ف اور ق پر کے مماس بیرونی نقطہ س پر قطع کرتے ہیں جس کے محدد (ھ، ک) ہیں۔ پس خط ف ق وترِ تماس ہے نقطۂ س میں سے کھینچے ہوئے مماسوں کا اور اس لیے ف ق کی مساوات گذشتہ دفعہ کے بموجب

$$\frac{\text{لا ھ}}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما ک}}{\text{ب}^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ہے۔ لیکن خط ف ق نقطۂ ن (لا، ما) میں سے گزرتا ہے، اس لیے

$$\frac{\text{لا}_1\,\text{ھ}}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}_1\,\text{ک}}{\text{ب}^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

مساوات (۲) سے معلوم ہوتا ہے کہ نقطۂ (ھ، ک) جو ایک متغیر نقطہ ہے ہمیشہ مساوات

$$\frac{\text{لا}_1\,\text{لا}}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}_1\,\text{ما}}{\text{ب}^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

کو پورا کرتا ہے۔ یعنے نقطۂ س کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے جس کی مساوات (۳) ہے۔

پس یہی نقطۂ ن کے قطبی کی مطلوبہ مساوات ہے ۔

نوٹ ۔ اگر نقطہ ن (لا، ما) ناقص پر واقع ہو تو مساوات (۳) بالکل وہی ہے جو نقطۂ ن پر کے مماس کی مساوات ہے ۔ اس سے معلوم ہوا کہ ناقص پر کے کسی نقطہ کا قطبی اس نقطہ پر کا مماس ہی ہوتا ہے ۔

نیز اگر نقطۂ ن ناقص کے باہر واقع ہو تو مساوات (۳) وہی ہے جو نقطۂ ن کے وترِ تماس کی ہے ۔ یعنے معلوم ہوا کہ ایک بیرونی نقطۂ ن کا قطبی اُس نقطہ کا وترِ تماس ہی ہوتا ہے ۔

۵۸۳ ۔ قطب کے محدّد ۔ فرض کرو کہ خطِ مستقیم

$$ا لا + ب ما + ج = ۰ \quad \text{.............(۱)}$$

دیا ہوا ہے اور ہم چاہتے ہیں کہ اس کا قطب بلحاظ ناقص دریافت کریں یعنے وہ نقطہ دریافت کریں جس کا قطبی دیا ہوا خطِ مستقیم (۱) ہے ۔

فرض کرو کہ قطب کے مطلوبہ محدّد (لا، ما) ہیں ۔

ہم گذشتہ دفعہ میں دیکھ چکے ہیں کہ نقطۂ (لا، ما) کے قطبی کی مساوات حسبِ ذیل ہے :

$$\frac{لا\ لا}{ا^۲} + \frac{ما\ ما}{ب^۲} = ۱ \quad \text{..........(۲)}$$

مساواتیں (۱) اور (۲) دونوں (لا، ما) کے قطبی یعنے ایک ہی خط کو تعبیر کرتی ہیں یعنے یہ دونوں مساواتیں زیادہ سے زیادہ صرف ایک مستقل جزوِ ضربی کے لحاظ سے مختلف ہو سکتی ہیں ۔ پس

$$\frac{\frac{لا}{ا^۲}}{ا} = \frac{\frac{ما}{ب^۲}}{ب} = \frac{۱}{-ج}$$

$$\text{یعنے } لا = -\frac{ا^۲ ا}{ج} \text{ ، } ما = -\frac{ب^۲ ب}{ج} \quad \text{............(۳)}$$

یعنے خطِ مستقیم (۱) کا قطب نقطہ $\left(\frac{-ا^2 ک}{ج} ، \frac{-ب ب^2}{ج} \right)$ ہے ۔

مثال (۱) ۔ ناقص $\frac{لا^2}{۹} + \frac{ما^2}{۴} = ۱$ کے لحاظ سے نقطہ (۱، −۲) کا قطبی معلوم کرو ۔

نقطہ (۱، −۲) میں سے کوئی خط کھینچو جو ناقص کو نقاط ف، ق پر قطع کرتا ہے ۔ فرض کرو کہ ف اور ق پر کے مماس ایک دوسرے کو بیرونی نقطہ (لاَ، ماَ) پر قطع کرتے ہیں تو خط ف ق نقطہ ر کا وتر تماس ہوگا اور اس لیے اس کی مساوات

$$\frac{لا لاَ}{۹} + \frac{ما ماَ}{۴} = ۱ \text{ ہوگی ۔}$$

لیکن چونکہ خط ف ق دیے ہوئے نقطہ (۱، −۲) میں سے گزرتا ہے اس لیے

$$\frac{لاَ}{۹} - \frac{۲ ماَ}{۴} = ۱$$

اس لیے (لاَ، ماَ) کا طریق یعنے دیے ہوئے نقطہ (۱، −۲) کا قطبی حسب ذیل خط ہوگا ۔

$$\frac{لا}{۹} - \frac{ما}{۲} = ۱ \text{ یا } ۲ لا - ۹ ما = ۱۸$$

مثال (۲) ۔ ناقص $\frac{لا^2}{۳۶} + \frac{ما^2}{۱۶} = ۱$ کے لحاظ سے خط ۲ لا − ۵ ما + ۸ = ۰ کا قطب معلوم کرو ۔

فرض کرو کہ مطلوبہ قطب (لاَ، ماَ) ہے تو دیے ہوئے ناقص کے لحاظ سے (لاَ، ماَ) کے قطبی کی مساوات

$$\frac{لا لاَ}{۳۶} + \frac{ما ماَ}{۱۶} = ۱$$

ہوگی ۔ پس یہ مساوات اسی خط کو تعبیر کرنی چاہیے جو ۲ لا − ۵ ما + ۸ = ۰ سے تعبیر ہوتا ہے

لہٰذا

لا۱ / (۲ × ۳۶) = ما۱ / (۵ × ۱۹) = −۱ / ۸

پس لا۱ = −۷۲/۸ = −۹، ما۱ = −۸۰/−۸ = +۱۰

پس قطب کے محدّد (−۹، ۱۰) ہیں۔

ناقص پر متفرق سوالات

(۱)۔ ذیل کی مساواتوں سے تعبیر ہونے والے ناقصوں کے محورِ اعظم اور محورِ اصغر کے طول اور مساواتیں، خروج المرکز اور ماسکوں کے محدّد معلوم کرو اور ناقصوں کو مرتسم کرو:—

(ا) ۴ لا^2 + ۹ ما^2 + ۱۶ لا − ۱۸ ما − ۱۱ = ۰

جواب (ا) ۳، ۲، ما − ۱ = ۰، لا + ۲ = ۰، √۵/۳، (−۲ + √۵، ۱)، (−۲ − √۵، ۱)

(ب) لا^2 + ۴ ما^2 + ۴ لا = ۰

جواب (ب) ۲، ۱، ما = ۰، لا + ۲ = ۰، √۳/۲، (−۲ + √۳، ۰)، (−۲ − √۳، ۰)

(ج) ۳ لا^2 + ۲ ما^2 + ۱۲ ما + ۱۲ لا = ۰

جواب (ج) √۱۵، √۱۰، لا + ۲ = ۰، ما + ۳ = ۰، ۱/√۳، (−۲، −۳ + √۵)، (−۲، −۳ − √۵)

(د) ۹ لا^2 + ما^2 + ۲ ما = ۱

جواب (د) √۲، √۲/۳، لا = ۰، ما + ۱ = ۰، √۸/۳، (۰، ۱/۳)، (۰، −۷/۳)

(۲) ایک ناقص کا محورِ اعظم محور لا کے متوازی اور مرکز (−۱، −۲) ہے۔ محوروں کے طول بالترتیب ۵ اور ۴ ہیں۔ ناقص کی مساوات دریافت کرو اور ناقص کی

ترسیم بناؤ -

جواب : $\frac{(\text{لا}+۱)^۲}{۶۴} + \frac{(\text{ما}+۲)^۲}{۱۶} = ۱$

(۳) ایک ناقص کے ماسکوں کے محدد (۳ ، -۱) ، (-۵ ، -۱) ہیں اور محورِ اعظم کا طول ۸ ہے - ناقص کی مساوات دریافت کرو اور اس کی ترسیم بناؤ -

جواب : $\frac{(\text{لا}+۱)^۲}{۶۴} + \frac{(\text{ما}+۱)^۲}{۴۸} = ۱$

(۴) ایک ناقص کے راس نقطوں (۲ ، -۲) اور (۲ ، ۴) پر ہیں اور خروج المرکز $\frac{۱}{۳}$ ہے - ناقص کی مساوات دریافت کرو اور اس کی ترسیم بناؤ -

جواب : $\frac{(\text{لا}-۲)^۲}{۹} + \frac{(\text{ما}-۱)^۲}{۸} = ۱$

(۵) ایک ناقص کا مرکز (۲ ، ۱) ، خروج المرکز $\frac{۱}{۳}$ ، محورِ اعظم محور ما کے متوازی اور محورِ اعظم کا طول ۶ ہے - ناقص کی مساوات دریافت کرو اور اس کی ترسیم بناؤ -

جواب : $\frac{(\text{لا}-۲)^۲}{۲۷} + \frac{(\text{ما}-۱)^۲}{۳۶} = ۱$

(۶) ایک ناقص کے راس نقطوں (۰ ، ۰) اور (-۵ ، ۰) پر ہیں اور ایک ماسکہ (-۲ ، ۰) ہے - ناقص کی مساوات دریافت کرو اور اس کی ترسیم بناؤ -

جواب : $\frac{۴(\text{لا}+\frac{۵}{۲})^۲}{۲۵} + \frac{\text{ما}^۲}{۹} = ۱$

(۷) ایک ناقص کے محورِ اعظم اور محورِ اصغر دیے گئے ہیں - پٹری اور پرکار کی مدد سے ناقص کے دونوں ماسکے دریافت کرو -

(۸) ایک مثلث کے قاعدہ کا طول ۴ اور باقی دو اضلاع کا مجموعہ ۶ ہے - مثلث کے راس کا طریق معلوم کرو -

جواب : $\frac{\text{لا}^۲}{۹} + \frac{\text{ما}^۲}{۵} = ۱$ (قاعدہ محور لا اور نقطۂ تنصیف مبداء ہے)

(۹) ثابت کرو کہ ناقص کا محورِ اصغر اس کے محورِ اعظم اور نیم وترِ خاص کے درمیان وسطِ تناسب ہے -

(۱۰) ثابت کرو کہ ناقص پر کے کسی نقطہ ن پر کا مماس ماسکی وتروں ن س اور ن سَ کے درمیانی خارجی زاویہ کی تنصیف کرتا ہے -

[فرض کرو کہ ن کے محدد (لا' ، ما') ہیں - ن پر کا مماس محور لا سے ت پر ملتا ہے تو ج ت = $\frac{\text{ا}^۲}{\text{لا}'}$.

اب سَ ت = مَس ج + ج ت = لا ز + $\frac{ل^۲}{لا}$ = $\frac{ل}{لا}$ (لا + ز لا) اور

س ت = ج ت ـ ج س = $\frac{ل^۲}{لا}$ ـ لا ز = $\frac{ل}{لا}$ (لا ـ ز لا)

$$\therefore \frac{\text{سَ ت}}{\text{س ت}} = \frac{\text{لا + ز لا}}{\text{لا ـ ز لا}} = \frac{\text{ن سَ}}{\text{ن س}}$$

(۱۱) ایک ناقص کا محورِ اصغر ۲۴ ہے، دونوں ماسکے اور مرکز محورِ اعظم کو چار مساوی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ ناقص کی مساوات دریافت کرو۔

جواب: $\frac{\text{لا}^۲}{۷۶۸} + \frac{\text{ما}^۲}{۵۷۶} = ۱$

(۱۲) دائرہ کو ایک ناقص مان کر جس میں لا = ب ہو ماسکے مرتب اور خروج المرکز دریافت کرو۔

جواب: ماسکے مرکز پر منطبق ہیں، خروج المرکز صفر ہے اور مرتب لاتناہی پر واقع ہیں۔

(۱۳) ایک ناقص کا مرکز (۱۰، ۲)، ایک مرتب لا = ۲ اور خروج المرکز $\frac{۳}{۴}$ ہے۔ ناقص کی مساوات حاصل کرو۔

جواب: $\frac{(\text{لا} - ۱۰)^۲}{۳۶} + \frac{۴(\text{ما} - ۲)^۲}{۶۳} = ۱$

(۱۴) ایک ناقص کا مرکز (۳، ۴) اور محورِ اعظم محورِ لا کے متوازی ہے۔ ناقص پر کے دو نقطے (ـ۲، ۴) اور (۳، ۰) ہیں۔ ناقص کی مساوات دریافت کرو۔

جواب: $\frac{(\text{لا} - ۳)^۲}{۲۵} + \frac{(\text{ما} - ۴)^۲}{۱۶} = ۱$

(۱۵) ایک ناقص کا مرکز (۴، ۲)، محورِ اعظم محور ما کے متوازی اور محورِ اصغر کا طول ۱۲ ہے۔ ناقص پر کا ایک نقطہ (۸، ۴) ہے۔ ناقص کی مساوات دریافت کرو۔

جواب: $\frac{(\text{لا} - ۴)^۲}{۱۴۴} + \frac{۲(\text{ما} - ۲)^۲}{۹} = ۱$

(۱۶) زمین کا طریق ایک ناقص ہے جس کے ایک ماسکہ پر سورج واقع ہے۔ طریق کے محورِ اعظم کا طول ۱۸۵۸ لاکھ میل اور خروج المرکز $\frac{1}{30}$ ہے۔ زمین اور سورج کے درمیان بعید ترین اور قریب ترین فاصلوں کا فرق معلوم کرو۔

جواب: ۶۱٫۹۳ لاکھ میل تقریباً۔

(۱۷) ناقص کے کسی نقطۂ ن سے محورِ اعظم پر عمود ن م ہے۔ ماسکہ س میں سے کھینچے ہوئے وترِ خاص س ف کے سرے ف پر کا مماس م ن مخروجہ کو ر پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ م ر = ف ن۔

چھٹا باب

قطع زائد

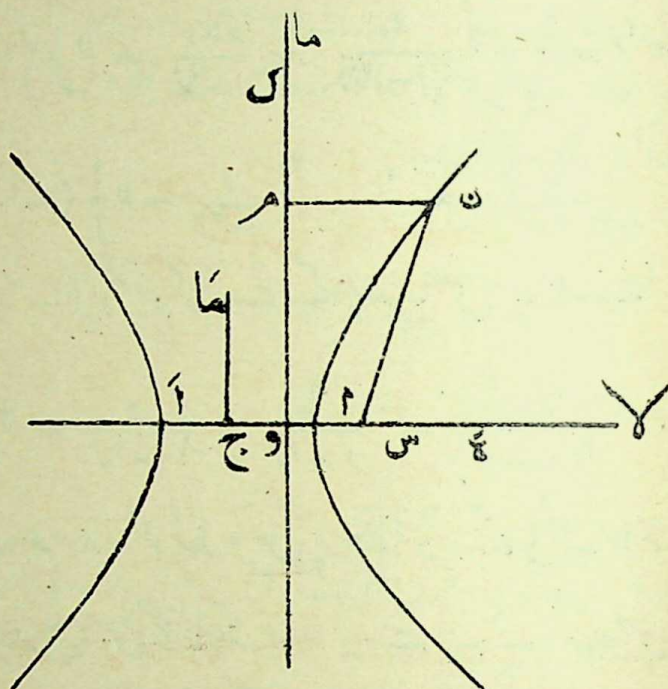
۱ء۶ ۔ زائد کی تعریف ——— ایک ثابت خطِ مستقیم و ک اور ایک ثابت نقطہ س دیے ہوئے ہیں ۔ ایک متغیر نقطہ ن اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اگر ن سے خط و ک پر عمود ن م ڈالا جائے تو

س ن = ز × ن م .... (۱)

جہاں ز ایک مستقل عدد ہے جو اکائی سے بڑا ہے ۔ متحرک نقطۂ ن کے طریق کو "زائد" کہتے ہیں ۔ ثابت نقطۂ س کو زائد کا "ماسکہ" ثابت خط و ک کو زائد کا مرتب اور عدد ز کو زائد کا "خروج المرکز" کہتے ہیں ۔

۱۱ء۶ ۔ زائد کی مساوات (معیاری شکل) ۔

فرض کرو کہ ماسکہ س سے مرتب و ک پر عمود س و ڈالا گیا ہے اور فاصلہ

س و = د .... (۱)

ہم نقطہ و کو مبداء، خط وس کو محور لا اور خط وک کو محور ما لیتے ہیں۔ فرض کرو کہ زائد پر کے کسی نقطہ ن کے محدّد (لا، ما) ہیں۔ تو چونکہ گذشتہ دفعہ کی رُو سے

ن س = ز × ن م

اس لیے ن س^{۲} = ز^{۲} × ن م^{۲} .... (۲)

یعنے (لا ـ د)^{۲} + ما^{۲} = ز^{۲} لا^{۲}

یعنے پھیلانے اور ترتیب دینے سے حاصل ہوتا ہے

لا^{۲} (ز^{۲} ـ ۱) + ۲ لا د ـ ما^{۲} = د^{۲}

یعنے (ز^{۲} ـ ۱) $\left\{\right.$ لا^{۲} + $\dfrac{\text{۲ لا د}}{\text{ز}^{۲}\text{ ـ ۱}}$ $\left.\right\}$ ـ ما^{۲} = د^{۲}

بڑی قوسوں کے اندر کے جملہ کو کامل مربع بنانے پر حاصل ہوتا ہے۔

$$(\text{ز}^2-1)\left\{\text{لا}^2+\frac{2\,\text{لا}\,\text{د}}{\text{ز}^2-1}+\frac{\text{د}^2}{(\text{ز}^2-1)^2}\right\}-\text{ما}^2=\text{د}^2+\frac{\text{د}^2}{\text{ز}^2-1}$$

یعنی

$$(\text{ز}^2-1)\left\{\text{لا}+\frac{\text{د}}{\text{ز}^2-1}\right\}^2-\text{ما}^2=\frac{\text{د}^2\,\text{ز}^2}{\text{ز}^2-1}$$

یعنی (ز² ـ ۱) پر تقسیم کرنے کے بعد حاصل ہوتا ہے

$$\left(\text{لا}+\frac{\text{د}}{\text{ز}^2-1}\right)^2-\frac{\text{ما}^2}{\text{ز}^2-1}=\frac{\text{د}^2\,\text{ز}^2}{(\text{ز}^2-1)^2}\qquad\ldots\ldots(۳)$$

اب ہم مبداء کو خط و س پر نقطۂ و کے بائیں جانب نقطۂ ج پر منتقل کرتے ہیں جس کا فاصلہ نقطۂ و سے $\frac{\text{د}}{\text{ز}^2-1}$ ہے یعنی بالفاظِ دیگر ہم مبداء کو نقطۂ $\left(-\frac{\text{د}}{\text{ز}^2-1}،\ 0\right)$ پر منتقل کرتے ہیں۔ نقطۂ ج میں سے نئے محوروں لاَ، ماَ کو ہم پرانے محوروں کے متوازی لیتے ہیں تو محدّدوں کی تبدیلی کے قاعدہ کی رُو سے نئے محدّد پرانے محدّدوں کی رقوم میں حسبِ ذیل حاصل ہوتے ہیں:

$$\left.\begin{aligned}\text{لاَ}&=\text{لا}+\frac{\text{د}}{\text{ز}^2-1}\\ \text{ماَ}&=\text{ما}\end{aligned}\right\}\qquad\ldots\ldots(۴)$$

مساوات (۳) میں (۴) کو درج کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$\text{لاَ}^2-\frac{\text{ماَ}^2}{\text{ز}^2-1}=\frac{\text{د}^2\,\text{ز}^2}{(\text{ز}^2-1)^2}\qquad\ldots\ldots(۵)$$

اب ہم سہولت کی خاطر اس مساوات میں سے زبروں کو نکال دیتے ہیں تو حاصل ہوتا ہے

$$لا^{2} - \frac{ما^{2}}{ز^{2}-1} = \frac{د^{2}\,ز^{2}}{(ز^{2}-1)^{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

لیکن یہ یاد رکھنا چاہیئے کہ مساوات (۶) میں محدد (لا، ما) نقطۂ ج کو مبداء مان کر لیے گئے ہیں اور مساوات (۳) میں محدد (لا، ما) نقطۂ و کو مبداء مان کر لیے گئے ہیں۔

اب ہم لکھتے ہیں

$$و = \frac{د\,ز}{ز^{2}-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

تو مساوات (۶) ہو جاتی ہے

$$لا^{2} - \frac{ما^{2}}{ز^{2}-1} = و^{2}$$

اس مساوات کو دونوں طرف $و^{2}$ پر تقسیم کرتے ہیں تو

$$\frac{لا^{2}}{و^{2}} - \frac{ما^{2}}{و^{2}(ز^{2}-1)} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

چونکہ زائد کے لیے خروج المرکز کی قیمت ایک سے بڑی ہوتی ہے اس لیے $و^{2}(ز^{2}-1)$ مثبت ہے۔ پس ہم لکھ سکتے ہیں،

$$ب^{2} = و^{2}(ز^{2}-1) \quad \text{یعنے} \quad ب = و\sqrt{ز^{2}-1} \quad \ldots\ldots (9)$$

اب مساوات (۸) ذیل کی شکل اختیار کرتی ہے

$$\frac{لا^{2}}{و^{2}} - \frac{ما^{2}}{ب^{2}} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

زائد کی اس مساوات (۱۰) کو معیاری مساوات کہتے ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ نقطۂ ج (جس کو زائد کا "مرکز" کہتے ہیں) کو مبداء، مرتب کے متوازی خط کو محور ما اور ماسکہ سے مرتب پر علی القوائم خط کو محور لا لینے سے یہ معیاری مساوات حاصل ہوتی ہے۔

ناقص کے بیان میں ہم نے ذکر کیا تھا کہ ناقص کی جو معیاری مساوات اسی طرح کی حاصل ہوتی ہے وہ سادہ ترین مساوات ہے لیکن زائد کے لیے یہ امر صحیح نہیں ہے۔ آگے چل کر دفعہ ۶۶۲ میں ہم زائد کے لیے اس معیاری مساوات سے سادہ تر ایک اور مساوات حاصل کرینگے ۔ بہرحال سوائے ان صورتوں کے جن میں "متقاربوں" کی خاصیت سے بحث ہوتی ہے زائد کے لیے اکثر یہی مساوات (۱۰) استعمال ہوتی ہے۔

۶۱۴ ۔ زائد کی شکل

— یہ دریافت کرنے کے لیے کہ محور لا زائد کو کہاں قطع کرتا ہے

زائد کی مساوات

$$\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = ۱ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

میں ما = ۰ رکھتے ہیں جس سے ملتا ہے

$$لا^2 = ا^2 \text{ یعنے } لا = + ا \text{ یا } لا = - ا$$

فرض کرو کہ لا = ا کے جواب میں زائد پر نقطہ ۲ اور لا = -ا کے جواب میں نقطہ ۲َ ملتے ہیں۔ جس سے معلوم ہوتا ہے کہ

$$۲۲َ = ۲ا \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

نقاط ۲ اور ۲َ کو زائد کے "راس" اور خط ۲۲َ کو زائد کا قاطع محور کہتے ہیں کیونکہ یہ خط زائد کو دو حقیقی نقطوں پر قطع کرتا ہے۔

پھر یہ دریافت کرنے کے لیے کہ محور ما زائد کو کہاں قطع کرتا ہے زائد کی مساوات (۱) میں ہم لا = ۰ رکھتے ہیں تو ملتا ہے

$$ما^2 = - ب^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

ظاہر ہے کہ مساوات (۳) سے ما کی خیالی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں یعنے محور ما زائد کو حقیقی نقطوں پر قطع نہیں کرتا۔ محور ما کو یعنے مرکز ج میں سے

قاطع محور ا اَ پر علی القوائم خط کو "مزدوج محور" کہتے ہیں ۔
اب ہم زائد کی مساوات (ا) کو ذیل کی شکلوں میں سے کسی ایک شکل میں لکھ سکتے ہیں :

$$ما = \pm ب \sqrt{\frac{لا^۲}{ا^۲} - ۱} \quad \dots\dots\dots (۴)$$

$$لا = \pm ا \sqrt{\frac{ما^۲}{ب^۲} + ۱} \quad \dots\dots\dots (۵)$$

مساوات (۴) سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر لا^۲ > ا^۲ یعنے اگر لا کی قیمت + ا اور - ا کے درمیان واقع ہو تو ما کی کوئی حقیقی قیمت حاصل نہیں ہوتی یعنے نقاط ا اور اَ کے درمیان منحنی کا کوئی حصہ واقع نہیں ہوتا۔ لا^۲ > ا^۲ کے لیے یعنے لا کی ان قیمتوں کے لیے جبکہ لا > ا یا لا < - ا ہو مساوات (۴) سے معلوم ہوتا ہے کہ ما کی دو مساوی اور مختلف العلامت قیمتیں ہیں ۔ پس زائد کا منحنی محور لا کے گرد تشاکل ہے ۔ اس کے علاوہ جب لا کی قیمت بڑھتی جاتی ہے تو ما کی قیمت بھی بڑھتی جاتی ہے یہاں تک کہ لا کی بہت بڑی (لا تناہی) قیمت کے لیے ما کی بہت بڑی (لا تناہی) قیمت حاصل ہوتی ہے ۔
مساوات (۵) سے معلوم ہوتا ہے کہ ما کی تمام قیمتوں کے لیے لا کی دو مساوی اور مختلف العلامت قیمتیں حاصل ہوتی ہیں یعنے منحنی محور ما کے گرد بھی تشاکل ہے ۔

ان امور کی بناء پر اگر زائد کی ترسیم بنائیں تو دفعہ گذشتہ میں دی ہوئی شکل کا منحنی حاصل ہوتا ہے ۔ ہم دیکھتے ہیں کہ منحنی کے دو حصے ہیں جن میں سے ایک حصہ پر راس ا واقع ہے اور وہ محور لا کی مثبت سمت میں لا تناہی تک بڑھتا جاتا ہے اور دوسرے حصہ پر راس اَ واقع ہے اور وہ محور لا کی منفی سمت میں بڑھتا جاتا ہے ۔

۶۶۲ ۔ اس دفعہ میں ہم ج س اور ج و کے فاصلوں کو ا اور ز کی رقوم میں بیان کرینگے۔ دفعہ ۱۱۶ کی مساواتوں (۱)، (۳) اور (۷) سے معلوم ہے کہ

$$\text{و س} = \text{د}$$

$$\text{ج و} = \frac{\text{د}}{\text{ز}^2 - 1}$$

$$\text{ج ا} = \text{ا} = \frac{\text{د ز}}{\text{ز}^2 - 1}$$

اس لیے

$$\text{ج س} = \text{ج و} + \text{و س}$$

$$= \frac{\text{د}}{\text{ز}^2 - 1} + \text{د} = \frac{\text{د ز}^2}{\text{ز}^2 - 1}$$

$$= \text{ز} \times \frac{\text{د ز}}{\text{ز}^2 - 1} = \text{ز} \times \text{ج ا} = \text{ا ز}$$

یعنی

$$\text{ج س} = \text{ا ز} \quad \dots\dots\dots\dots (1)$$

اسی طرح

$$\text{ج و} = \frac{\text{د}}{\text{ز}^2 - 1}$$

$$= \frac{1}{\text{ز}} \times \frac{\text{د ز}}{\text{ز}^2 - 1}$$

$$= \frac{1}{\text{ز}} \times \text{ج ا} = \frac{\text{ا}}{\text{ز}}$$

یعنی

$$\text{ج و} = \frac{\text{ا}}{\text{ز}} \quad \dots\dots\dots\dots (2)$$

چونکہ زائد کے لیے ز > ۱ اس لیے ہمیں ذیل کے رشتے حاصل ہوتے ہیں:

$$\text{ج س} > \text{ج ا} > \text{ج و} \quad \dots\dots\dots\dots (3)$$

یعنے زائد کا مرتب، مرکز اور ماسکہ کے درمیان واقع ہوتا ہے۔
برخلاف اس کے ناقص کے متعلق ہم نے دیکھا ہے کہ ناقص کا ماسکہ، مرکز اور مرتب کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

۶۲۱ - اب ہم ثابت کرینگے کہ ناقص کی طرح زائد کا بھی ایک دُوسرا ماسکہ اور دُوسرا مرتب دونوں موجود ہیں۔

مرکز ج سے بائیں طرف قاطع محور محدودہ پر ایک نقطہ سَ اس طرح لوکہ

سَ ج = ج س = ا ز ....(۱)

اسی طرح قاطع محور پر ج سے بائیں طرف ایک اور نقطہ وَ ایسا لوکہ

$$\text{وَ ج} = \text{ج و} = \frac{\text{ا}}{\text{ز}} \text{ ....(۲)}$$

نقطۂ وَ سے خط وَ و پر عمود وَ کَ کھینچو۔

اب ہم ثابت کرینگے نقطۂ سَ زائد کا دُوسرا ماسکہ اور خط وَ کَ متناظر مرتب ہے۔

زائد پر کوئی نقطہ ن لو جس کے مجدّد (لا، ما) ہیں ۔ ن سَ کو ملاؤ ۔ اور ن سے خط وَ کَ پر عمود ن مَ ڈالو اور نیز ن سے خط و وَ پر عمود ن ل ڈالو ۔ تب

مَ ن = وَ ل = وَ ج + ج ل

= ا/ز + لا .... (۳)

اور

ن سَ^۲ = سَ لَ^۲ + ل ن^۲

= (سَ ج + ج ل)^۲ + ل ن^۲

= (ا ز + لا)^۲ + ما^۲ .... (۴)

چونکہ نقطۂ ن کے مجدّد زائد کی مساوات کو پورا کرتے ہیں اس لیے

لا^۲/ا^۲ − ما^۲/ب^۲ = ۱

یعنے　لا^۲/ا^۲ − ما^۲/(ا^۲(ز^۲ − ۱)) = ۱

یعنے

لا^۲ (ز^۲ − ۱) − ما^۲ = ا^۲ (ز^۲ − ۱)

اس مساوات کو پھیلانے اور مختلف طور پر ترتیب دینے سے حاصل ہوتا ہے

لا^۲ ز^۲ + ا^۲ = لا^۲ + ا^۲ ز^۲ + ما^۲

پھر دونوں طرف ۲ ا ز لا جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے

لا^۲ ز^۲ + ۲ ا ز لا + ا^۲ = لا^۲ + ۲ ا ز لا + ا^۲ ز^۲ + ما^۲

یعنے　ز^۲ (لا^۲ + ۲ ا لا/ز + ا^۲/ز^۲) = (لا^۲ + ۲ ا ز لا + ا^۲ ز^۲) + ما^۲

یعنی

$$ز^2 \times (لا + \frac{ل}{ز})^2 = (لا + ا ز)^2 + ما^2 \quad ......(۵)$$

مساواتوں (۳) اور (۴) کو مساوات (۵) میں درج کرنے پر ملتا ہے

$$ن سَ^2 = ز^2 \times ن مَ^2$$

یعنی

$$ن سَ = ز \times ن مَ \quad ....(۶)$$

مساوات (۶) سے معلوم ہوتا ہے کہ نقطۂ ن اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک ثابت نقطۂ سَ سے اس کا فاصلہ متناسب ہے ایک ثابت خطِ مستقیم وَ کَ پر ن سے عمود کے۔ اور نیز یہ کہ تغیر کا مستقل ز ہے یعنی بڑا ہے ایک سے۔ پس نقطۂ سَ زائد کا دوسرا ماسکہ اور خط وَ کَ متناظر مرتب ہے۔

۶۳ ۶ - اب ہم زائد کی وہ خاصیت ثابت کرینگے جو دفعہ ۳۱ ۵ میں بیان کی ہوئی ناقص کی خاصیت کے متناظر ہے

زائد پر کوئی نقطۂ ن لو اور اس کو دونوں ماسکوں س اور سَ سے ملاؤ۔ ہم ثابت کرینگے کہ خواہ نقطۂ ن کہیں واقع ہو ن سَ اور ن س کا

فرق ہمیشہ مستقل ہوگا اور ۲ ا کے برابر ہوگا یعنے ہم ثابت کرینگے کہ

ن سَ ـــ ن س = ۲ ا .... (۱)

نقطہ ن سے مرتب و ک پر عمود ن مر اور مرتب وَ کَ پر عمود ن مَر ڈالو تو زائد کی تعریف کے بموجب ہم کو حاصل ہوتا ہے

ن سَ = ز × ن مَر .... (۲)

اور

ن س = ز × ن مر .... (۳)

پس (۳) میں سے (۲) کو تفریق کرنے پر حاصل ہوتا ہے

ن سَ - ن س = ز (ن مَر - ن مر)

= ز × مَر مر = ز × وَ و

= ز × ۲ ج و .... (۴)

لیکن دفعہ ۲۶۲ کی مساوات (۲) سے ہم کو معلوم ہے کہ

ج و = ا/ز .... (۵)

ج و کی قیمت (۵) کو مساوات (۴) میں درج کرنے پر ملتا ہے

ن سَ - ن س = ز × ۲ ا/ز = ۲ ا .... (۶)

جس سے مسئلہ ثابت ہوجاتا ہے۔
اس کے علاوہ ہم دیکھتے ہیں کہ

ن س = ز × ن مر = ز × ل و

= ز × (ج ل - ج و)

= ز (لا - ا/ز)

= ز لا - ل ....(۷)

اور

ن س = ز × ن م = ز × وَ ل

= ز (ج ل + وَ ج)

= ز (لا + ل/ز)

= ز لا + ل ....(۸)

مساواتوں (۷) اور (۸) سے ن س اور ن سَ کی قیمتیں مل جاتی ہیں اور (۸) میں سے (۷) کو تفریق کرنے پر ہمیں مساوات (۶) مل جاتی ہے۔

۶٫۳۱ - زائد کا وترِ خاص - زائد کے وترِ خاص کی تعریف بعینہٖ وہی ہے جو ناقص یا مکافی کے لیے ہے۔ اسکس میں سے اگر قاطع محور پر علی القوائم خط کھینچا جائے جو زائد کو دو نقطوں ق اور قَ پر ملے (دیکھو گذشتہ دفعہ کی شکل) تو خطِ مستقیم ق س قَ کو "وترِ خاص" کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ نصف وترِ خاص ق س کا طول ل ہے۔ نقطۂ ق سے مرتب و ک پر عمود ق ع ڈالو تو چونکہ نقطۂ ق زائد پر واقع ہے اس لیے تعریف کے بموجب

ق س = ز × ق ع = ز × و س = ز × (ج س - ج و)

یعنے ل = ز (لاز - لا/ز)

= لا (ز۲ - ۱) ....(۱)

لیکن دفعہ ۶٫۱۱ کی مساوات (۹) کے بموجب

$$ب^۲ = ا^۲ (ز^۲ - ۱)$$

اس لیے $ز^۲ - ۱ = \frac{ب^۲}{ا^۲}$ .... (۲)

مساوات (۲) سے ز - ا کی قیمت مساوات (۲) میں درج کرنے پر ملتا ہے

$ل = ا \times \frac{ب^۲}{ا^۲} = \frac{ب^۲}{ا}$ .... (۳)

یعنے نصف وترِ خاص کی قیمت محوروں کی رقوم میں بعینہٖ اسی شکل کی ہے جو ناقص کے لیے حاصل ہوئی تھی۔

مساوات (۲) سے ہم کو خروج المرکز کی قیمت بھی محوروں کی رقوم میں ملتی ہے۔

$$ز^۲ = \frac{ب^۲}{ا^۲} + ۱ = \frac{ا^۲ + ب^۲}{ا^۲}$$

اس لیے $ز = \frac{\sqrt{ا^۲ + ب^۲}}{ا}$ .... (۴)

مشق ۲۴

(۱) دفعہ ۳۶ء میں بیان کی ہوئی خاصیت کہ ن س - ن س = ۲ا کو بالکل تحلیلی طریقہ پر ثابت کرو۔ (مقابلہ کرو دفعہ ۳۱ء ۵)

(۲) ثابت کرو کہ اگر نقطہ (لا، ما) زائد کے باہر واقع ہو تو $\frac{لا^۲}{ا^۲} - \frac{ما^۲}{ب^۲} < ۱$

اور اگر نقطہ زائد کے اندر واقع ہو تو $\frac{لا^۲}{ا^۲} - \frac{ما^۲}{ب^۲} > ۱$۔

(۳) اُس زائد کی مساوات معلوم کرو جس کے قاطع محور کا طول ۴ اور مزدوج محور کا طول ۱۰ ہو۔

جواب: $\frac{لا^۲}{۱۶} - \frac{ما^۲}{۱۰۰} = ۱$

(۴) اُس زائد کی مساوات معلوم کرو جس کے مزدوج محور کا طول ۵ اور جس کے دونوں ماسکوں کا درمیانی فاصلہ ۱۳ ہے۔

جواب: $\frac{لا^2}{144} - \frac{ما^2}{25} = 1$

(۵) اُس زائد کی مساوات معلوم کرو جو نقاط (۳، ۰) اور (۰، ۴) میں سے گذرے۔

جواب: $\frac{لا^2}{9} - \frac{ما^2}{16} = 1$

(۶) مساوات ۹ لا۲ ـ ۱۸ لا ـ ۴ ما = ۰ سے تعبیر ہونے والے زائد کا مرکز اور وتر خاص معلوم کرو۔

جواب: (۱، ۰)؛ $\frac{9}{2}$

(۷) اُس زائد کی مساوات معلوم کرو جس کے قاطع محور کا طول ۲ او ہے اور جس کا راُس، مرکز اور ماسکہ کے نقطہ تنصیف پر واقع ہے۔

جواب: ۳ لا۲ ـ ما۲ = ۳ او۲

(۸) اُس زائد کی مساوات معلوم کرو جس کا ماسکہ س نقطہ (۲، ۱) پر واقع ہے، مرتب خطِ مستقیم ۴ لا ـ ۳ ما ـ ۱ = ۰ اور خروج المرکز $\frac{5}{4}$ ہے۔

فرض کرو کہ زائد پر کے کسی نقطہ ن کے محدد (لاَ، ماَ) ہیں۔ اور نقطۂ ن سے مرتب پر عمود ن م ڈالا گیا ہے۔ ہم کو معلوم ہے کہ

$$ن م = \frac{4لاَ - 3ماَ - 1}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{4لاَ - 3ماَ - 1}{5}$$

چونکہ زائد کی تعریف کے بموجب

$$ن س = ز \times ن لا = \frac{5}{4} \times ن م$$

اس لیے

$$ن س^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 . ن م^2$$

یعنی

$$(لاَ - 2)^2 + (ماَ - 1)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 . \frac{(4لاَ - 3ماَ - 1)^2}{25}$$

پس زائد کی مساوات حاصل ہوتی ہے اگر زبروں کو دور کر دیا جائے

(لا − ۲)² + (ما − ۱)² = ۱/۱۶ (۴ لا − ۳ ما − ۱)²

یعنے پھیلانے اور ترتیب دینے پر زائد کی مساوات ملتی ہے

۷ ما² + ۲۴ لا ما − ۵۶ لا − ۳۸ ما + ۷۹ = ۰

اس مساوات میں ہم دیکھتے ہیں کہ

(لا² کا سر) × (ما² کا سر) − (۲ لا ما کا سر)² = ۰ × ۷ − ۱۲² = − ۱۴۴

< ۰

یعنے زائد کی مساوات میں (لا² کا سر) × (ما² کا سر) − (۲ لا ما کا سر)² منفی ہوتا ہے۔
عام صورت میں بھی یہ خاصیت بآسانی ثابت کی جا سکتی ہے۔ فرض کرو کہ ماسکہ نقطہ (لا₁، ما₁) ہے مرتب خط ا لا + ب ما + ج = ۰ اور خروج المرکز ز ہے۔

اب دفعہ ۲۵۵ کی مثال (۱) میں جو عمل ہم نے کیا تھا بعینہٖ لفظ بلفظ وہی عمل یہاں بھی کرنا ہوگا اور زائد کے لیے بھی وہی مساوات (۵) دفعہ ۲۵۵ حاصل ہو گی۔ صرف فرق اس قدر ہے کہ زائد کے لیے خروج المرکز ز ایک سے بڑا ہے۔ غرض کہ زائد کی مساوات ہو گی

(لا − لا₁)² + (ما − ما₁)² = ز² (ا لا + ب ما + ج)² / (ا² + ب²)

یعنے پھیلا کر لکھنے اور ترتیب دینے پر حاصل ہوتا ہے

لا² (۱ − ا² ز² / (ا² + ب²)) + ۲ لا ما (− ا ب ز² / (ا² + ب²)) + ما² (۱ − ب² ز² / (ا² + ب²))
+ پہلے درجہ کی رقمیں + مستقل رقم = ۰

یہاں بھی ہم کو اسی طرح حاصل ہوتا ہے کہ

(لا² کا سر) × (ما² کا سر) − (۲ لا ما کا سر)² = ۱ − ز² < ۰

کیونکہ ز > ۱ ۔ زائد کی ہر مساوات میں یہ خاصیت ضرور پائی جاتی ہے کہ جملہ {لا^{۲} کا سر × ما^{۲} کا سر ۔ (۲ لا ما کا سر)^{۲}} منفی ہوتا ہے ۔ آگے چل کر طالب علم کو معلوم ہوگا کہ اگر دوسرے درجہ کی مساوات میں یہ شرط پوری ہو تو وہ مساوات یقیناً زائد کو تعبیر کرتی ہے ۔ اگر دوسرے درجہ کی عام سے عام مساوات دی ہوئی ہو

ا لا^{۲} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{۲} + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ ۔

اور یہ مساوات دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر نہ کرے تو ہمیں حسبِ ذیل نتائج ملتے ہیں :

(۱) ا ب ۔ ھ^{۲} > ۰ ۔ تو مساوات ناقص کو تعبیر کرتی ہے ۔
(۲) ا ب ۔ ھ^{۲} < ۰ ۔ تو مساوات زائد کو تعبیر کرتی ہے ۔
(۳) ا ب ۔ ھ^{۲} = ۰ ۔ تو مساوات مکافی کو تعبیر کرتی ہے کیونکہ اس صورت میں دوسرے درجہ کی رقمیں کامل مربع بناتی ہیں ۔

۶ء ۴ ۔ چونکہ زائد کی مساوات ناقص کی مساوات سے صرف اس بات میں مختلف ہے کہ زائد کی مساوات میں + ب^{۲} کی بجائے ۔ ب^{۲} ہے اس لیے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ زائد کے لیے بہت سے مسائل ناقص کے متعلق متناظر مسائل سے اخذ کیے جا سکتے ہیں بشرطیکہ ب^{۲} کی علامت بدل دی جائے ۔ ہم یہاں صرف ان مختلف نتیجوں کو بیان کرنے پر اکتفا کرینگے ۔ یہ مساواتیں ناقص کے متعلق متناظر مساواتوں سے صرف ب^{۲} کی علامت بدل کر لکھ دی گئی ہیں ۔ طالب علم کے لیے یہ اچھی مشق ہوگی اگر وہ ان نتیجوں کو براہِ راست ابتدائی اصول سے اسی طرح تفصیلی عمل کے ساتھ حاصل کرے جیسے کہ ہم نے ناقص کے بیان میں متناظر مسئلوں کو حاصل کیا ہے ۔

(ل) زائد پر کے کسی دو نقطوں (لا$_{۱}$، ما$_{۱}$) اور (لا$_{۲}$، ما$_{۲}$) کو ملانے والے

وتر کی مساوات ہے

$$\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{ما} - \text{ما}_1} = \frac{\text{ا}^2}{\text{ب}^2} \times \frac{\text{ما}_2 + \text{ما}_1}{\text{لا}_2 + \text{لا}_1} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

(ب) زائد پر کے کسی نقطہ (لا۱، ما۱) پر کے مماس کی مساوات ہے

$$\frac{\text{لا لا}_1}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما ما}_1}{\text{ب}^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

(ج) زائد پر کے کسی نقطہ (لا۱، ما۱) پر کے عماد کی مساوات ہوگی

$$\text{ا}^2 \text{ما}_1 (\text{لا} - \text{لا}_1) + \text{ب}^2 \text{لا}_1 (\text{ما} - \text{ما}_1) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

(د) خط ما = م لا + ج زائد کو مس کرتا ہے اگر

$$\text{ج} = \pm \sqrt{\text{ا}^2 \text{م}^2 - \text{ب}^2} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

(ھ) خطِ مستقیم لا جم عہ + ما جب عہ = ع زائد کو مس کرتا ہے اگر

$$\text{ع}^2 = \text{ا}^2 \text{جم}^2 \text{عہ} - \text{ب}^2 \text{جب}^2 \text{عہ} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

(و) کسی بیرونی نقطہ ن (لا۱، ما۱) کے وترِ تماس کی مساوات ہے

$$\frac{\text{لا لا}_1}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما ما}_1}{\text{ب}^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

(ز) زائد کے لحاظ سے کسی نقطہ ن (لا۱، ما۱) کے قطبی کی مساوات ہے۔

$$\frac{\text{لا لا}_1}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما ما}_1}{\text{ب}^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

(ط) زائد کے لحاظ سے کسی خطِ مستقیم ا لا + ب ما + ج = ۰ کے قطب کے محدد ہیں

$$\left(\frac{-\text{ا ا}^2}{\text{ج}} ،\ \frac{\text{ب ب}^2}{\text{ج}} \right)$$

(ی) زائد کا امدادی دائرہ وہ دائرہ ہے جس کا مرکز ج اور

نصف قطر ا ہے -

(ل) زائد کا مرتب دائرہ وہ دائرہ ہے جس کا مرکز ج اور نصف قطر $\sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}$ ہے - یہ دائرہ صرف اُس صورت میں حقیقی اور ممکن ہے جبکہ ا > ب - اگر ا = ب تو صرف ایک نقطہ یعنے مرکز ہی ایسا نقطہ ہے جہاں سے زائد کے دو علی القوائم مماس کھینچے جا سکتے ہیں - اگر ا < ب تو زائد کے کوئی دو علی القوائم مماس نہیں کھینچے جا سکتے -

۶٫۵ - متقارب -

تعریف - کسی منحنی کے متقارب سے مراد وہ خطِ مستقیم ہے جو منحنی کو ایسے دو نقطوں پر قطع کرے کہ دونوں نقاطِ تقاطع لاتناہی پر واقع ہوں لیکن خود خطِ مستقیم بالکلیہ لاتناہی پر واقع نہ ہو -

۶٫۵۱ - اب ہم اس تعریف کے بموجب زائد کے متقاربوں کی مساواتیں دریافت کرینگے اور نیز یہ بھی ثابت کرینگے کہ زائد کے دو اور صرف دو متقارب ہوتے ہیں -

فرض کرو کہ خطِ مستقیم

$$\text{ما} = \text{م لا} + \text{ج} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

زائد کا متقارب ہے - ظاہر ہے کہ ہر خط زائد کا متقارب نہیں ہو سکتا - اس لیے ہم کو دریافت کرنا چاہیے کہ م اور ج کن شرائط کو پورا کریں کہ خط (۱) متقارب ہو - پہلے ہم خطِ مستقیم (۱) اور زائد

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱ \qquad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

کے نقاطِ تقاطع معلوم کرتے ہیں - مساوات (۱) سے ما کی قیمت مساوات (۲) میں درج کرو -

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{(\text{م لا} + \text{ج})^2}{\text{ب}^2} = ۱$$

اِس مساوات کو پھیلانے اور لا کی قوتوں کے لحاظ سے ترتیب دینے پر ملتا ہے

لا^۲ (ب^۲ ـ ا^۲ م^۲) ـ ۲ ا^۲ م ج لا ـ ا^۲ (ج^۲ + ب^۲) = ۰ ...... (۳)

اگر خطِ مستقیم (۱) زائد کا متقارب ہو تو تعریف کے بموجب دونوں نقاطِ تقاطع لاتناہی پر ہونے چاہئیں یعنے مساوات (۳) کی دونوں اصلیں لامتناہی ہونی چاہئیں۔

جبر و مقابلہ سے ہم کو معلوم ہے کہ مساوات درجۂ دوم کی دونوں اصلیں لامتناہی ہونگی بشرطیکہ لا^۲ کا سر اور لا کا سر دونوں صفر ہوں ۔ پس حاصل ہوتا ہے

ب^۲ ـ ا^۲ م^۲ = ۰ .... (۴)

اور

ا^۲ م ج = ۰ .... (۵)

مساوات (۴) سے م کی دو قیمتیں ملتی ہیں

م = ± ب/ا .... (۶)

اور چونکہ ا اور م دونوں صفر نہیں ہیں اس لیے مساوات (۵) سے ملتا ہے

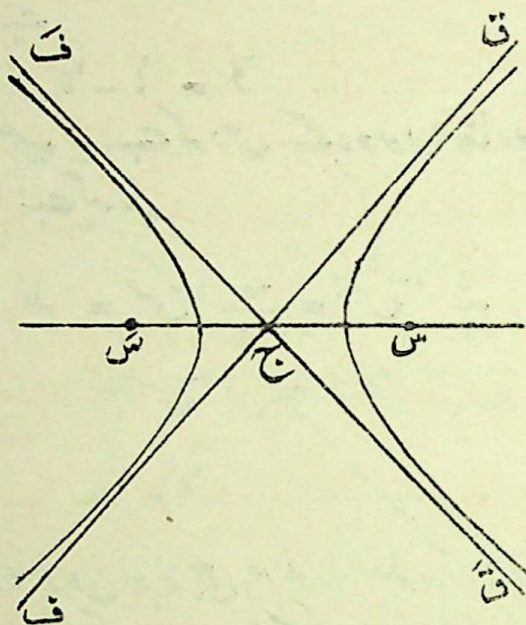
ج = ۰ .... (۷)

مساواتوں (۶) اور (۷) سے م اور ج کی قیمتوں کو مساوات (۱) میں درج کرنے پر معلوم ہوتا ہے کہ زائد کے دو متقارب

ما = + ب/ا لا .... (۸)

اور ما = ـ ب/ا لا .... (۹)

ہیں۔ مساواتوں (۸) اور (۹) سے ظاہر ہے کہ یہ دونوں متقارب مرکز ج میں سے گزرتے ہیں اور محور لا سے زاویے طا اور (۲۲ ـ طا)

بناتے ہیں جہاں مس ط = $\frac{ب}{ا}$

شکل میں خطوط ق ج ف اور قَ ج فَ متقاربوں کو تعبیر کرتے ہیں ۔ اور زاویہ ق ج س = ط = مس$^{-1}$ $\frac{ب}{ا}$ ، زاویہ فَ ج س = ۱۸۰° ـ ط
دونوں متقاربوں کی مشترکہ مساوات

$$\frac{لا^{2}}{ا^{2}} - \frac{ما^{2}}{ب^{2}} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۰)$$

ہے اور یہ زائد کی مساوات سے صرف بقدر مستقل کے مختلف ہے۔ دونوں متقاربوں کے درمیان زاویہ ۲ ط ہے ۔

۶۷۶ ۔ قائم زائد ـــــ اس خاص قسم کے زائد کو جس کے قاطع اور مزدوج محوروں کے طول مساوی ہوں یعنے جس کے لیے

$$ا = ب \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

ہو "قائم زائد" کہتے ہیں۔ پس قائم زائد کی مساوات حسبِ ذیل ہوتی ہے:

$$\text{لا}^2 - \text{ما}^2 = \text{و}^2 \quad \ldots\ldots (۲)$$

قائم زائد کی وجہ تسمیہ یہ ہے کہ اس کے دونوں متقاربوں کا درمیانی زاویہ قائمہ ہوتا ہے کیونکہ

$$\text{ط} = \text{مس}^{-1}\frac{\text{ب}}{\text{و}} = \text{مس}^{-1}\frac{\text{و}}{\text{و}}$$

$$= \text{مس}^{-1}\,۱ = ۴۵^\circ$$

$$\text{یعنے}\quad ۲\,\text{ط} = ۹۰^\circ \quad \ldots\ldots (۳)$$

قائم زائد کا خروج المرکز بھی ہم فوراً معلوم کرسکتے ہیں۔ دفعہ ۶،۳۱ کی مساوات (۴) سے ہم کو معلوم ہے کہ کسی زائد کے لیے

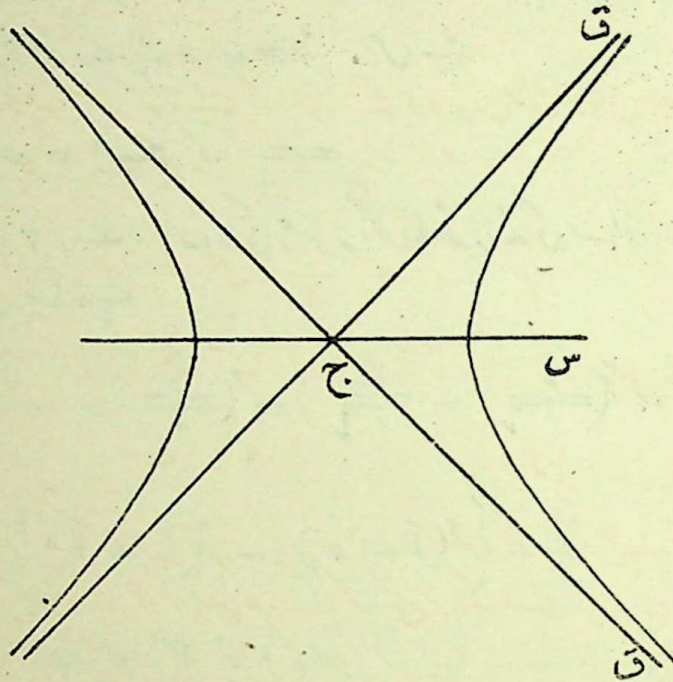
$$\text{ز} = \frac{\sqrt{\text{و}^2 + \text{ب}^2}}{\text{و}}$$

پس قائم زائد کے لیے

$$\text{ز} = \frac{\sqrt{۲\,\text{و}^2}}{\text{و}} = \sqrt{۲} \quad \ldots\ldots (۴)$$

۶،۶۱ ۔ قائم زائد کی مساوات متقاربوں کو محور مانکر۔

دفعہ ۶،۱۱ میں ہم نے ذکر کیا تھا کہ زائد کی معیاری مساوات سادہ ترین شکل میں نہیں ہے بلکہ اس سے بھی زیادہ سادہ مساوات حاصل کی جاسکتی ہے۔ پہلے قائم زائد کے لیے ہم یہ سادہ ترین مساوات حاصل کرینگے۔ اس کے لئے یہ کافی ہے کہ بجائے قاطع محور کو محور لا اور مزدوج محور کو محور ما لینے کے متقاربوں کو محور مان لیں۔

فرض کرو کہ شکل میں متقارب ج ق کو ہم محور لاَ اور متقارب ج ق کو

محور ماَ لیتے ہیں - یعنے مبداء کو ثابت رکھ کر محوروں کو زاویۂ (- طہ) میں سے گھما دیتے ہیں - قائم زائد کی پرانی مساوات گذشتہ دفعہ کے بموجب حسبِ ذیل ہے

لا۲ - ما۲ = ا۲ .... (۱)

دفعہ ۱۹۹ (ب) سے ہم کو معلوم ہے کہ اگر محوروں کو زاویۂ طہ میں سے گھما دیا جائے تو نئے محدّدوں (لاَ، ماَ) اور پرانے محدّدوں (لا، ما) میں حسبِ ذیل رشتہ ہوتا ہے :-

لا = لاَ جم طہ - ماَ جب طہ
ما = لاَ جب طہ + ماَ جم طہ } .... (۲)

لیکن موجودہ صورت میں ہم نے چونکہ محوروں کو زاویۂ (- طہ) میں سے گھمایا ہے اس لیے نئے محدّدوں اور پرانے محدّدوں میں رشتے حسبِ ذیل ہونگے :-

لا = لاَ جم (۔ طہ) ۔ ماَ جب (۔ طہ) = لاَ جم طہ + ماَ جب طہ
ما = لاَ جب (۔ طہ) + ماَ جم (۔ طہ) = ۔ لاَ جب طہ + ماَ جم طہ ..... (۳)

نیز چونکہ قائم زائد کے لیے طہ = ۴۵° اس لیے

جم طہ = جب طہ = ۱/√۲ .... (۴)

مساواتوں (۳) سے لا اور ما کی قیمتوں کو قائم زائد کی مساوات (۱) میں درج کرنے پر ملتا ہے

(لاَ/√۲ + ماَ/√۲)^۲ ۔ (۔ لاَ/√۲ + ماَ/√۲)^۲ = لو^۲

یعنی

۱/۲ {(لاَ + ماَ)^۲ ۔ (ماَ ۔ لاَ)^۲} = لو^۲

یعنی ۱/۲ × ۴ لاَ ماَ = لو^۲

یعنی لاَ ماَ = لو^۲/۲ .... (۵)

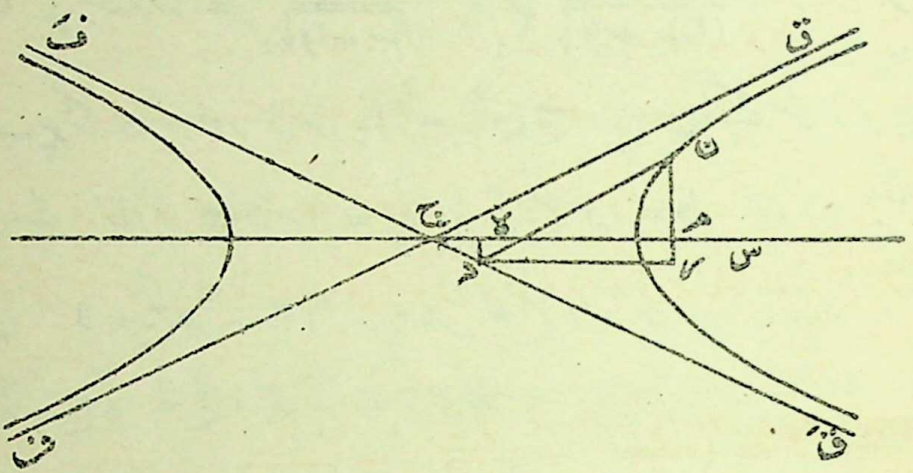
سہولت کی خاطر مساوات (۵) میں سے زبروں کو نکال دیں تو قائم زائد کی سادہ ترین مساوات حسبِ ذیل حاصل ہوتی ہے :۔

لا ما = لو^۲/۲ .... (۶)

یاد رہے کہ یہ مساوات متقاربوں کو محور مان کر حاصل کی گئی ہے۔ اور مساوات (۱) قاطع اور مزدوج محوروں کو محور لا اور ما مان کر حاصل کی گئی تھی۔

۶۲ء ۶۔ زائد کی مساوات متقاربوں کو محور مان کر۔

فرض کرو کہ زائد کی معیاری مساوات

$$\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ا}^{۲}} - \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ب}^{۲}} = ۱ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

ہے اور اس پر کوئی نقطہ ن ہے جس کے محدد (لا، ما) ہیں۔ زائد کے دو متقارب ق ج ف اور قَ ج فَ ہیں۔ ہم محوروں کو تبدیل کرتے ہیں اور ج قَ کو محور لاَ، ج ق کو محور ماَ لیتے ہیں۔

نقطۂ ن سے ق ج کے متوازی خط کھینچو جو قَ ج سے نقطۂ د پر ملے تو ن کے نئے محدد ج د = لاَ اور د ن = ماَ ہونگے۔ نقطۂ د سے ج س پر عمود د لا ڈالو۔

نیز نقطۂ ن سے ج س پر عمود ن م ڈالو۔ نقطۂ د سے ج س کے متوازی خط کھینچو جو ن م محدود ہ سے ہ پر ملے

فرض کرو کہ زاویۂ ق ج س = ط تو دفعہ ۵۶ کی مساوات (۶) سے معلوم ہے کہ

$$\text{مس ط} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}} = \frac{\text{جب ط}}{\text{جم ط}}$$

$$\text{یعنی} \quad \frac{\text{جب ط}}{\text{ب}} = \frac{\text{جم ط}}{\text{ا}} = \frac{۱}{\sqrt{\text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲}}}$$

پس جب طہ = ب / √(ا۲ + ب۲) ، جم طہ = ا / √(ا۲ + ب۲) .....(۲)

اب چونکہ ن د اور د ر بالترتیب ق ج اور ج س کے متوازی ہیں

اس لیے زاویۂ ن د ر = زاویۂ ق ج س = طہ .....(۳)

پس لا = ج م = ج ہ + ہ م = ج ہ + د ر ....(۴)

لیکن ج ہ = ج د جم طہ = لاَ جم طہ

اور د ر = د ن جم طہ = ماَ جم طہ

پس مساوات (۴) میں یہ قیمتیں رکھنے سے ملتا ہے

ج ہ + د ر = (لاَ + ماَ) جم طہ

یعنے لا = (لاَ + ماَ) ا / √(ا۲ + ب۲) .....(۵)

اسی طرح ما = ن م = ن ر - م ر = ن ر - ہ د .....(۶)

لیکن ن ر = ن د جب طہ = ماَ جب طہ

ہ د = ج د جب طہ = لاَ جب طہ

پس یہ قیمت مساوات (۶) میں رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

ن ر - ہ د = (ماَ - لاَ) جب طہ

یعنے

ما = (ماَ - لاَ) ب / √(ا۲ + ب۲) ....(۷)

مساواتوں (۵) اور (۷) سے لا اور ما کی قیمتوں کو مساوات (۱) میں درج کرنے پر ملتا ہے

$$\frac{(\text{لاَ} + \text{مَا})^2}{\text{ل}^2} \cdot \frac{\text{ل}^2}{\text{ل}^2 + \text{ب}^2} - \frac{(\text{مَا} - \text{لاَ})^2}{\text{ب}^2} \cdot \frac{\text{ب}^2}{\text{ل}^2 + \text{ب}^2} = 1$$

یعنی

$$(\text{لاَ} + \text{مَا})^2 - (\text{مَا} - \text{لاَ})^2 = \text{ل}^2 + \text{ب}^2$$

یعنی

$$4\,\text{لاَمَا} = \text{ل}^2 + \text{ب}^2$$

یعنی

$$\text{لاَمَا} = \frac{\text{ل}^2 + \text{ب}^2}{4} \quad \ldots\ldots (8)$$

اس مساوات میں سے سہولت کی خاطر زبروں کو نکال دیتے ہیں تو حاصل ہوتا ہے

$$\text{لاما} = \frac{\text{ل}^2 + \text{ب}^2}{4} \quad \ldots\ldots (9)$$

یہ یاد رہے کہ مساوات (۹) متقاربوں کو حوالہ کے محور لینے پر حاصل ہوتی ہے اور مساوات (۱) قاطع اور مزدوج محوروں کو حوالہ کے محور لینے پر ملتی ہے۔ مساوات (۹) زائد کی سادہ ترین مساوات ہے اور قائم زائد کے لیے جو سادہ ترین مساوات حاصل ہوتی تھی وہ اس مساوات سے ب = ل رکھ کر اخذ کی جا سکتی ہے۔

چونکہ دونوں متقاربوں کا درمیانی زاویہ لازماً قائمہ نہیں ہے اس لیے یہ مساوات "مائل محوروں" کے لحاظ سے ہے۔ سوائے اُن مسائل کے جن میں متقاربوں سے بحث ہوتی ہے طالب علم کو اس مساوات کا زیادہ استعمال نہیں کرنا چاہیے بلکہ وہی معیاری مساوات استعمال کرنی چاہیئے۔

مثال - زائد $36\,\text{لا}^2 - 25\,\text{ما}^2 + 216\,\text{لا} + 100\,\text{ما} - 676 = 0$ کو معیاری شکل میں تحویل کرو اور اس کے مرکز، ماسکوں، راسوں کے محدد، قاطع محور اور مزدوج محوروں کے طول، مرتبوں اور متقاربوں کی مساواتیں دریافت کرو۔

حل - لا اور ما میں مربعوں کو پورا کرنے پر حاصل ہوتا ہے کہ

۳۶ (لا² + ۶لا + ۹) − ۲۵ (ما² − ۴ما + ۴) = ۹۰۰ + ۳۲۴ − ۱۰۰

یعنے

۳۶ (لا + ۳)² − ۲۵ (ما − ۲)² = ۹۰۰

یعنے (لا + ۳)²/۲۵ − (ما − ۲)²/۳۶ = ۱ .... (۱)

مساوات (۱) سے ظاہر ہے کہ اگر مبداء کو نقطہ (−۳، ۲) پر تبدیل کیا جائے تو مساوات ہو جاتی ہے

لا²/۲۵ − ما²/۳۶ = ۱ .... (۲)

پس معلوم ہوا کہ مرکز کے محدد (−۳، ۲) ہیں ۔ اور نصف قاطع محور ا = ۵،
نصف مزدوج محور ب = ۶

اس لیے خروج المرکز ز = √(ا² + ب²)/ا = √(۲۵ + ۳۶)/۵ = √۶۱/۵

مرکز سے ماسکوں کا فاصلہ = ا ز = √۶۱

پس ماسکوں کے محدد س (−۳ + √۶۱، ۲)، سَ (−۳ − √۶۱، ۲)

راس ع کے محدد (−۳ + ۵، ۲) یعنے (۲، ۲)

راس عَ کے محدد (−۳ − ۵، ۲) یعنے (−۸، ۲)

مرکز سے مرتب کا فاصلہ = ا/ز = ۲۵/√۶۱

پس ایک مرتب کی مساوات = لا = −۳ + ۲۵/√۶۱

اور دوسرے مرتب کی مساوات لا = −۳ − ۲۵/√۶۱

ایک متقارب کا میلان قاطع محور سے طہ ہو تو مس طہ = + ب/ا = ۶/۵

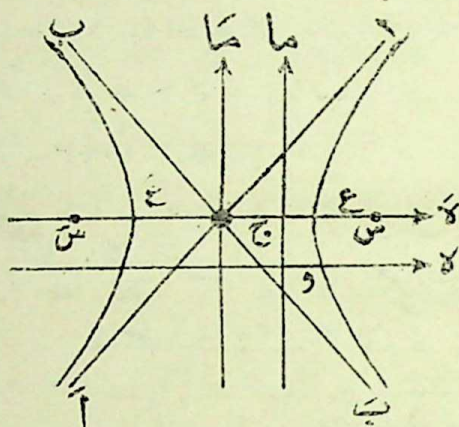
یہ متقارب مرکز یعنے نقطہ (−۳، ۲) میں سے گزرتا ہے ۔

اس لیے ایک متقارب کی مساوات ما − ۲ = ۶/۵ (لا + ۳) یعنے ۶لا − ۵ما + ۲۸ = ۰

دوسرے متقارب کا میلان قاطع محور سے طہَ ہو تو مس طہَ = − ب/ا = − ۶/۵

اس لیے دوسرے متقارب کی مساوات ما - ۲ = - $\frac{۶}{۵}$ (لا + ۳) یعنے ۶لا + ۵ما + ۸ = ۰

ذیل کی شکل میں اس زائد کی ترسیم دی گئی ہے :-

زائد پر متفرق مشقیں

(۱) اُس زائد کی مساوات معلوم کرو جس کے ماسکے (۵، ۰)، (-۵، ۰) ہیں اور جس کا نصف قاطع محور ۳ ہے۔

جواب $\frac{\text{لا}^2}{۹} - \frac{\text{ما}^2}{۱۶} = ۱$

(۲) ایک زائد کے قاطع محور اور مزدوج محور کے طول دیے گئے ہیں۔ پٹری اور پرکار کی مدد سے اسکوں کا مقام دریافت کرو۔

(۳) ذیل کی مساواتوں سے تعبیر ہونے والے زائدوں کے اسکوں کے محدد اور مرتبوں کی مساوات اور نیز خروج المرکز معلوم کرو :-

(ا) $\frac{\text{لا}^2}{۹} - \frac{\text{ما}^2}{۴} = ۱$　　(ب) $\frac{\text{لا}^2}{۱۶} - \frac{\text{ما}^2}{۹} = ۱$

جواب (ا) (√۱۳، ۰)، (−√۱۳، ۰)، لا ± ۹/√۱۳ = ۰، √۱۳/۳

(ب) (۵، ۰)، (−۵، ۰)، لا ± ۱۶/۵ = ۰، ۵/۴

(۴) ذیل کی مساواتوں کو معیاری شکل میں تحویل کرو اور ان سے تعبیر ہونے والے زائدوں کے مرکز کے محدد، ماسکوں کے محدد، مرتبوں کی مساواتیں، متقاربوں کی مساواتیں اور خروج المرکز معلوم کرو۔

(ا) ۹ لا² − ۱۶ ما² − ۱۸ لا + ۶۴ ما − ۱۹۹ = ۰

(ب) ۴ لا² − ما² + ۸ لا − ۲ ما − ۱ = ۰

(ج) ۲ لا² − ۳ ما² − ۵ = ۰

(د) ۸ لا² − ۹ ما² − ۱۶ لا + ۵۴ ما − ۱ = ۰

جواب (ا) معیاری شکل (لا − ۱)²/۱۶ − (ما − ۲)²/۹ = ۱، مرکز (۱، ۲)، ز = ۵/۴،
ماسکے (۶، ۲)، (−۴، ۲)

مرتب لا − ۲۱/۵ = ۰، لا + ۱۱/۵ = ۰ اور متقارب ۹(لا − ۱)² − ۱۶(ما − ۲)² = ۰

(ب) معیاری شکل (لا + ۱)²/۱ − (ما + ۱)²/۴ = ۱، مرکز (−۱، −۱)، ز = √۵،
ماسکے (−۱ + √۵، −۱)، (−۱ − √۵، −۱)

مرتب لا + ۱ − ۱/√۵ = ۰، اور لا + ۱ + ۱/√۵ = ۰

متقارب ۴(لا + ۱)² − (ما + ۱)² = ۰

(ج) معیاری شکل لا²/(۵/۲) − ما²/(۵/۳) = ۱، مرکز کے محدد (۰، ۰)، ز = √(۵/۳)،
ماسکے (۵√۶/۶، ۰)، (−۵√۶/۶، ۰)

مرتب لا + √(۳/۲) = ۰، اور لا − √(۳/۲) = ۰، اور متقارب ۲ لا² − ۳ ما² = ۰

(د) (ما − ۳)²/۸ − (لا − ۱)²/۹ = ۱، مرکز کے محدد (۱، ۳)، ز = √(۱۷/۸)
ماسکے (۱، ۳ + √۱۷)، (۱، ۳ − √۱۷)

مرتب ما = ۳ − ۸/√۱۷ اور ما = ۳ + ۸/√۱۷

اور متقارب ۹(ما − ۳)² − ۸(لا − ۱)² = ۰

(۵) اُس زائد کی مساوات معلوم کرو جس کے ماسکے (۳، ۴)، (۔۳، ۴) ہیں اور قاطع محور ۴ ہے۔

جواب $\frac{لا^2}{۴} - \frac{(ما-۴)^2}{۵} = ۱$ یعنی $۵لا^2 - ۴ما^2 + ۳۲ما - ۸۴ = ۰$۔

(۶) اُس زائد کی مساوات معلوم کرو جس کا قاطع محور خط ما = ۲ پر ہے، مزدوج محور کا طول ۶ ہے، خروج المرکز $\frac{۵}{۴}$ ہے اور مرکز محور ما پر واقع ہے۔

جواب $\frac{لا^2}{۱۶} - \frac{(ما-۲)^2}{۹} = ۱$ یعنی $۹لا^2 - ۱۶ما^2 + ۶۴ما - ۲۰۸ = ۰$۔

(۷) اُس زائد کی مساوات معلوم کرو جس کے ماسکے (۲، ۱)، (۔۴، ۱) ہیں اور مزدوج محور کا طول ۲ ہے۔

جواب $\frac{(لا+۱)^2}{۸} - \frac{(ما-۱)^2}{۱} = ۱$ یعنی $لا^2 + ۲لا - ۸ما^2 + ۱۶ما - ۱۵ = ۰$۔

(۸) اُس زائد کی مساوات معلوم کرو جس کے مرتبوں کی مساواتیں لا = $\frac{۸}{۵}$ اور لا = ۔$\frac{۸}{۵}$ ہیں اور قاطع محور کا طول ۴ ہے ۔ مرکز محور لا پر ہے۔

جواب $\frac{لا^2}{۴} - \frac{ما^2}{\frac{۹}{۴}} = ۱$ یعنی $۹لا^2 - ۱۶ما^2 - ۳۶ = ۰$۔

(۹) اُس زائد کی مساوات معلوم کرو جس کا قاطع محور، محور لا ہے، مرکز مبداء پر ہے اور جو نقطوں (۶، ۴) اور (۔۳، ۱) میں سے گزرتا ہے۔

جواب $\frac{۵لا^2}{۳۶} - \frac{ما^2}{۴} = ۱$

(۱۰) ایک متغیر نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ثابت نقطوں (۶، ۰) اور (۔۶، ۰) سے اس کے فاصلوں کا فرق ۸ ہے۔ متغیر نقطہ کا طریق دریافت کرو۔

جواب $\frac{لا^2}{۱۶} - \frac{ما^2}{۲۰} = ۱$

(۱۱) ایک زائد کا قاطع محور، محور لا پر ہے، مرکز مبداء پر ہے، اور خروج المرکز

ہے اور زائد نقطہ (۳، ۲) میں سے گزرتا ہے۔ زائد کی مساوات دریافت کرو۔

جواب $\frac{\text{۳لا}^{2}}{\text{۲۳}} - \frac{\text{ما}^{2}}{\text{۲۳}} = \text{۱}$

(۱۲) متقاربوں کو محور مان کر قائم زائد $\text{لا}^{2} - \text{ما}^{2} = \text{۱۶}$ کو تحویل کرو۔

جواب $\text{لاما} = \text{۸}$

(۱۳) اُس زائد کی مساوات معلوم کرو جس کا مرکز مبداء پر ہے، قاطع محور کا طول ۲۴ اور ماسکوں کا درمیانی فاصلہ ۳۲ ہے۔

جواب $\frac{\text{لا}^{2}}{\text{۱۴۴}} - \frac{\text{ما}^{2}}{\text{۱۱۲}} = \text{۱}$

(۱۴) ایک زائد کا مرکز مبداء پر اور قاطع محور کا طول ۲۴ اور مزدوج محور کا طول ماسکوں کے درمیانی فاصلہ کا نصف ہے۔ زائد کی مساوات دریافت کرو۔

جواب $\frac{\text{لا}^{2}}{\text{۱۴۴}} - \frac{\text{۳ما}^{2}}{\text{۱۴۴}} = \text{۱}$

(۱۵) ذیل کے زائدوں کے متقارب معلوم کرو اور منحنیوں کی ترسیم بھی کرو۔

(ا) $\frac{\text{لا}^{2}}{\text{۱۸}} - \frac{\text{ما}^{2}}{\text{۱۲}} = \text{۱}$ (ب) $\frac{\text{ما}^{2}}{\text{۲۵}} - \frac{\text{لا}^{2}}{\text{۱۶}} = \text{۱}$

(ج) $\text{۹لا}^{2} - \text{۱۸ما}^{2} = \text{۱۶}$ (د) $\text{لا}^{2} - \text{ما}^{2} = \text{۱۲}$

(ہ) $\text{۹لا}^{2} - \text{۱۸ما}^{2} - \text{۱۶} = \text{۰}$ (و) $\text{لا}^{2} - \text{ما}^{2} + \text{۱۲} = \text{۰}$

جواب (ا) $\text{لا} = \pm \sqrt{\tfrac{\text{۳}}{\text{۲}}}\,\text{ما}$ (ب) $\text{ما} = \pm \tfrac{\text{۵}}{\text{۴}}\,\text{لا}$ (ج) $\text{لا} = \pm \sqrt{\text{۲}}\,\text{ما}$

(د) $\text{لا} \pm \text{ما} = \text{۰}$ (ہ) $\text{لا} = \pm \sqrt{\text{۲}}\,\text{ما}$ (و) $\text{لا} = \pm \text{ما}$

(۱۶) اُس زائد کی مساوات معلوم کرو جس کے رأس نقطوں (۴، ۰) اور (−۴، ۰) پر ہیں اور جس کے متقاربوں کا درمیانی زاویہ ۶۰° ہے۔

جواب $\frac{\text{لا}^{2}}{\text{۱۶}} - \frac{\text{۳ما}^{2}}{\text{۱۶}} = \text{۱}$

(۱۷) ثابت کرو کہ کسی زائد کے ایک ماسکہ سے متقارب تک کا فاصلہ نصف مزدوج محور کے مساوی ہے۔

(۱۸) ایک زائد کے ماسکہ سے متقارب پر عمود ڈالا جاتا ہے ثابت کرو کہ اس عمود کے پائین سے مرکز تک کا فاصلہ نصف قاطع محور کے مساوی ہے۔

(۱۹) اگر خطِ مستقیم $\text{ما} = ۲\,\text{لا} + \text{ب}$ زائد $\frac{\text{لا}^{۲}}{۹} - \frac{\text{ما}^{۲}}{۴} = ۱$ کا مماس ہو تو ب کی قیمت معلوم کرو۔

جواب $\text{ب} = ۴\sqrt{۲}$

(۲۰) اگر خطِ مستقیم $\text{ما} = \text{م}\,\text{لا} + ۲$ زائد $\frac{\text{لا}^{۲}}{۱۶} - \frac{\text{ما}^{۲}}{۹} = ۱$ کا مماس ہو تو م کی قیمت معلوم کرو۔

جواب $\text{م} = \pm \frac{\sqrt{۱۳}}{۴}$

(۲۱) ایک زائد کا مرکز نقطہ (−۲، ۷) پر ہے اور ایک مرتب خط ما = ۵ اور غروج المرکز $\frac{۵}{۴}$ ہے۔ زائد کی مساوات معلوم کرو۔

جواب $\frac{(\text{لا} + ۲)^{۲}}{(\frac{۵}{۲})^{۲}} - \frac{(\text{ما} - ۷)^{۲}}{(\frac{۳}{۴} \times \frac{۵}{۲})^{۲}} = ۱$

(۲۲) ذیل کی مساواتوں کو معیاری شکل میں تحویل کرو اور ان سے تعبیر ہونے والے زائدوں کے مرکز کے محدد، راسوں اور ماسکوں کے محدد، مرتبوں کی مساواتیں اور متقاربوں کی مساواتیں معلوم کرو۔

(ا) $۹\,\text{لا}^{۲} - ۱۶\,\text{ما}^{۲} - ۱۰۸\,\text{لا} + ۹۶\,\text{ما} + ۳۶ = ۰$

(ب) $۱۶\,\text{ما}^{۲} - \text{لا}^{۲} - ۶\,\text{لا} - ۸۰\,\text{ما} + ۷۵ = ۰$

(ج) $۸\,\text{لا}^{۲} - ۲۸\,\text{ما}^{۲} - ۸\,\text{لا} - ۲۸\,\text{ما} - ۶۱ = ۰$

(د) $۳\,\text{ما}^{۲} - ۴\,\text{لا}^{۲} - ۱۶\,\text{لا} - ۲۴\,\text{ما} - ۵۲ = ۰$

(ہ) $۹\,\text{لا}^{۲} - ۲۵\,\text{ما}^{۲} + ۵۴\,\text{لا} + ۱۰۰\,\text{ما} + ۲۰۶ = ۰$

جواب (ا) $\frac{(\text{لا} - ۶)^{۲}}{۱۶} - \frac{(\text{ما} - ۳)^{۲}}{۹} = ۱$ مرکز کے محدد (۶، ۳)

راس کے محدد $(\frac{۴۶}{۵}، ۳)(\frac{۱۴}{۵}، ۳)$

اسکے (۱۱، ۳) (۱، ۳)،
متقارب ۹ (لا − ۲)^۲ − ۱۶ (ما − ۳)^۲ = ۰
مرتبوں کی مساواتیں لا = ۲۶/۵ اور لا = ۱۴/۵
اور ز = √۱۷ / ۴

(ب) (ما − ۵/۲)^۲ / ۱ − (لا + ۳)^۲ / ۱۶ = ۱، مرکز کے محدد (−۳، ۵/۲) راس کے محدد (−۳، ۵/۲ + ۱/√۱۷)
(−۳، ۵/۲ − ۱/√۱۷)
ماسکے [(−۳، ۵/۲ + √۱۷)]، [(−۳، ۵/۲ − √۱۷)]
مرتبوں کی مساواتیں ما = ۵/۲ + ۱/√۱۷
اور ما = ۵/۲ − ۱/√۱۷ ز = √۱۷
متقارب ۱۶ (ما − ۵/۲)^۲ − (لا + ۳)^۲ = ۰

(ج) (لا − ۱/۲)^۲ / ۷ − (ما + ۱/۲)^۲ / ۲ = ۱، مرکز کے محدد (۹/۲، −۱/۲) ز = √(۹/۷) = ۳/√۷
ماسکے (۱/۲ + ۳، −۱/۲) (۱/۲ − ۳، −۱/۲)
راس (۱۶/۹، −۱/۲)، (−۱۱/۹، −۱/۲)
متقارب ۲ (لا − ۱/۲)^۲ − ۷ (ما + ۱/۲)^۲ = ۰

(د) (ما − ۴)^۲ / ۲۸ − (لا + ۲)^۲ / ۲۱ = ۱، مرکز (−۲، ۴) ماسکے (−۲، ۱۱) اور (−۲، −۳)
راس (−۲، ۸)، (−۲، ۰)
مرتب کی مساواتیں ما = ۸، ما = ۰
متقارب ۲۱ (ما − ۴)^۲ − ۲۸ (لا + ۲)^۲ = ۰

(ہ) (ما − ۲)^۲ / ۹ − (لا + ۳)^۲ / ۲۵ = ۱، مرکز (−۳، ۲) ماسکے (−۳، ۲ + √۳۴)
(−۳، ۲ − √۳۴)،
راس (−۳، ۲ + ۹/√۳۴) (−۳، ۲ − ۹/√۳۴)
مرتب ما = ۲ + ۹/√۳۴ اور ما = ۲ − ۹/√۳۴
متقارب ۲۵ (ما − ۲)^۲ − ۹ (لا + ۳)^۲ = ۰

(۲۳) ایک زائد کے محور حوالے کے محوروں کے متوازی ہیں اور وہ نقطوں (۳، ۴) (−۷، ۴)، (۵، ۴ + ۳√۳) اور (−۱۲، ۴ − ۳√۳) میں سے گزرتا ہے۔

زائد کی مساوات دریافت کرو۔

جواب $\frac{(\text{لا}+۲)^۲}{۲۵} - \frac{(\text{ما}-۳)^۲}{۱۶} = ۱$

(۲۴) ذیل کی مساواتوں میں محوروں کو دیے ہوئے زاویہ فہ میں سے گھماؤ اور اس طرح تصدیق کرو کہ یہ مساواتیں زائدوں کو تعبیر کرتی ہیں۔ ان زائدوں کے محوروں کا طول، مرکز اور راسئوں کے محدد اور منتقاربوں کی مساواتیں دریافت کرو۔

(ا) $\text{لا}^۲ - ۴\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ما}^۲ + ۹ = ۰$، فہ = ۴۵°

(ب) $\text{لا}^۲ - ۱۴\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ما}^۲ + ۴\sqrt{۲}\,\text{لا} - ۲\sqrt{۲}\,\text{ما} + ۱۱ = ۰$، مس فہ = ۱

(ج) $\text{لا}^۲ + ۲\,\text{لا}\,\text{ما} - \text{ما}^۲ + ۸\,\text{لا} + ۴\,\text{ما} - ۸ = ۰$، فہ = $۲۲\frac{۱}{۲}$°

(جب فہ = $\frac{۱}{۲}\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}$، جم فہ = $\frac{۱}{۲}\sqrt{۲ + \sqrt{۲}}$)

(۲۵) زائد $۹\,\text{لا}^۲ - ۱۶\,\text{ما}^۲ + ۵۴\,\text{لا} + ۱۲۸\,\text{ما} + ۱۶۰۱ = ۰$ کے نقطۂ $(۹، ۴ + ۸\sqrt{۳})$ پر کے مماس اور عماد کی مساواتیں دریافت کرو۔

جواب مماس کی مساوات $۲۷\,\text{لا} - ۳۲\sqrt{۳}\,\text{ما} + ۵۲۵ + ۱۲۸\sqrt{۳} = ۰$

عماد کی مساوات $۲۷\,\text{ما} + ۳۲\sqrt{۳}\,\text{لا} = ۱۰۸ + ۵۰۴\sqrt{۳}$

(۲۶) زائد $۱۲\,\text{لا}^۲ - ۲۵\,\text{ما}^۲ + ۷۲\,\text{لا} + ۲۰۰\,\text{ما} - ۷۳۶ = ۰$ کے نقطوں (۳، ۴) اور (−۷، ۴) پر کے مماسوں اور عمادوں کی مساواتیں معلوم کرو۔

جواب (ا) مماس کی مساوات $\text{لا} - ۳ = ۰$ اور عماد کی مساوات $\text{ما} - ۴ = ۰$

(ب) مماس کی مساوات $\text{لا} + ۷ = ۰$ اور $\text{ما} = ۴$ عماد کی مساوات

(۲۷) زائد $۵\,\text{لا}^۲ - ۹\,\text{ما}^۲ = ۳۶$ کے نقطوں (۶، ۴) اور (−۳، ۱) پر کے مماسوں اور عمادوں کی مساواتیں دریافت کرو۔

جواب (ا) مماس کی مساوات $۵\,\text{لا} - ۶\,\text{ما} = ۶$

اور عماد کی مساوات $۵\,\text{ما} + ۶\,\text{لا} = ۵۶$

(ب) مماس کی مساوات $۵\,\text{لا} + ۳\,\text{ما} + ۱۲ = ۰$

عماد کی مساوات $۵\,\text{ما} - ۳\,\text{لا} = ۱۴$

(۲۸) زائد لا^۲ - ۳ با^۲ + ۳ = ۰ کے نقطہ (۳، ۲) پر کے مماس اور عماد کی مساواتیں دریافت کرو۔

جواب لا - ۲ با + ۱ = ۰ مماس کی مساوات

با + ۲لا = ۸ عماد کی مساوات

صحت نامہ

محددوں کا ہندسہ

بار دوم

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۱۱	۱۳	(ا۱ - ۲ ا۲^۲)	(ا۱ - ا۲)^۲
۲۳	۵	لا۱ ا۲ - لا۲ ا۲	لا۲ ا۲ + لا۲ ا۲
۳۱	۱۵	د ہ	د و
۷۱	۱۲	غ ۱/۲ (ب۲ ج۲ - ب۲ ج۲)	ص ۱/۲ (ب۲ ج۳ - ب۳ ج۲)
۷۵	۱۵	غ ج۱ ل + ج۲ م + ج۲ ن = ۰	ص ج۱ ل + ج۲ م + ج۳ ن = ۰
۷۶	۲	(-۵ ۱/۲) ج (۶-۲)	(-۵ ۱/۲) ج (۶-۲)
۹۴	۱۴	لا^۲	لاَ
۹۶	۷	غ لا۱ (۲ لا۱ + ۱/۲ ا۱ + ۷/۲)	ص لا۱ (۲ لا۱ + ۱/۲ ا۱ + ۷/۲)
۹۹	شکل میں	ن (لا۱، ا)	ن (لا×، ا)
۱۰۵	۵	ا = م لا + ب ا	ا = م۱ لا + ب۱ ا

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۱۰۵	شکل میں	ا = م۲ لا + بم	ا = م۲ لا + ب۲
۱۰۶	۲	- ج / (د + ب م۲)	- ج / (د + ب م۲)
۱۲۶	۱۴	اور ہ دو سرے	اور ہر دوسرے
۱۳۲	۱۷	= ۲۰ گ لا۱	= ۲۰ گ لا۱
۱۳۳	۳	غ - ۵ (۲ + ھ) + (-۱ + ک)	ص - ۵ (۲ + ھ) - (-۱ + ک)
۱۴۲	۱۶	دائرہ کاکوئی	دائرہ کا کوئی
۱۵۰	۱۲	لا۱ ھ	لا۱ ھ
۱۵۵	۱۷	ایک ہم	ایک اہم
۱۶۱	۳	غ ۱/ن۲ {ع (لا۱)^۲ + ع (ا۱)^۲} ع {(لا۱^۲ + ا۱^۲) - م}	ص ۱/ن۲ {(ع لا۱)^۲ + (ع ا۱)^۲} - ۱/ن {ع (لا۱^۲ + ا۱^۲) - م}

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۱۶۱	۱۸	ڈ	ڈلا
۱۶۹	۸	۲ + ر	ر۱ + ر۲
〃	۹	ر۱ + ر۲	ر۱ ر۲
〃	۱۶	غ ر = ج / (گ جم ط + ف جب ط)	ص ر = - ج / (گ جم ط + ف جب ط)
۱۷۴	۲	لا² + ما² - ۱ لا	لا² + ما² - ۱۰ لا
۱۷۵	شکل ۱۳/۲	[شکل]	[شکل] و
۱۷۸	شکل میں	ک ـ	ک ب ل
〃	۸	ثابت نقطہ	ثابت نقطہ
۱۸۱	۱۷	ما² = ۴ و لا	ما² = ۴ و لا
۱۸۵	شکل	ما = ۲ لا	ما² = لا
۱۸۶	۴/۱	ما² - ۲ لا	ما² = - ۲ لا
۱۸۹	۵	مبدا:	مبدا ء
۱۹۰	شکل	م۲	م۲
۱۹۹	۷	مکانی	مکانی
۲۴۱	۳	(و ز، ل)	(و ز، ل)
〃	۲۰	۱ - ز²	۱ - ز²

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۲۵۶	۱۶	ما⁶ / ب²	ما² / ب²
۲۵۸	۵	(لا۲، ما۱)	(لا۱، ما۱)
〃	۱۳	غ = ب(ما۲ + ما۱) + ۲ ث / و(لا۲ - لا۱) + ۲ گ	ص = ب(ما۲ + ما۱) + ۲ ث / و(لا۲ + لا۱) + ۲ گ
۲۵۹	۱۴	سروں کے	سروں پر کے
۲۶۳	۱۵	فرض رد کہ	فرض کرو کہ
۲۶۵	۱۴	و² ب² جب² عہ	و² ب² جب² عہ
۲۶۶	۹	حسب ذیل ہے،	حسب ذیل ہے:
۲۶۶	۱۸	و² ل ن² / و² ل² + ب² م²	و² ل ن / و² ل² + ب² م²
۲۶۹	۱۱	د تر	وتر
۲۷۰	۴	ہوتا —	ہوتا ہے۔
۲۷۱	۱۸	لا للم / ۳۶	لا لا۱ / ۳۶
۲۷۳	۱۸	رأس	راس
۲۷۷	آخری سطر	}}	}
۳۰۸	۲۲	۹ / ۳۴ -	۹ / ۳۴ -